المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (18) 2010
ص ص [117–131]

بعض مقدرات النسبة والانحدار لتباين المجتمع المحدود للمعاينة ثنائية الطور

ريكان عبد العزيز احمد*

الملخص:

في هذا البحث تم تقدير تباين المجتمع المحدود S_y^2 باستخدام المعلومات المساعدة وبالاعتماد على المعاينة ثنائية الطور (المعاينة المضاعفة) وذلك من خلال المقدرات الأربعة المقترحة للنسبة والانحدار ، اذ تم اشتقاق مقدار التحيز ومتوسط مربعات الخطأ Mse إلى المقدرات المقترحة من مرتبة $O(n^{-1})$، وتم حساب اقل متوسط مربعات خطأ ممكن إلى تلك المقدرات لغرض المقارنة واستخراج أفضلها في تمثيل تباين المجتمع المحدود مع تعميم تلك المقدرات.

On some Ratio and Regression Estimators for the Finite Population Variance in Two Phase Sampling

ABSTRACT:

In this paper, we propose a number of families of estimators of ratio and regression to estimate the population variance S_y^2 using auxiliary information in two phase sampling, the bias and the mean square error expression for the above estimators are obtained up to terms of order $O(n^{-1})$ only and calculate minimizing the Mse for all estimators and also the generalization of estimators.

---

* أستاذ مساعد / قسم الإحصاء/ كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة البصرة

تاريخ التسلم :19 /5 /2009 ـــــــــــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول : 1/8 /2010

1- المقدمة:

تعتمد عدد من طرائق المعاينة في التقدير على امتلاك معلومات مسبقة حول متغير مساعد وليكن مثلاً x_i مرتبط مع متغير الدراسة الرئيسي وليكن y_i من الأمثلة على ذلك مقدر النسبة والانحدار الخ. اذ يتطلب تقدير النسبة أو تقدير الانحدار المعتمـد تعريفهما على المتوسط $\overline{X}$ أو التباين S_x^2 معرفة مسبقة بمتوسط أو بتباين المجتمـع للمتغير x_i. وإذا كان من المرغوب فيه تقسيم المجتمع إلـى طبقـات وفقـاً لقـيم المتغير x_i، فيجب أن يكون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير معروفـاً، وعنـدما لا توجد مثل هذه المعلومات يكون من السهل علينا احياناً أن نأخذ عينة تمهيدية نقيس بها المتغير x_i فقط . والغاية من هذه العينة هي أن تمدنا بتقدير جيد إلى $\overline{X}$ أو S_x^2 ولتوزيع x_i، ومن ثم أيجاد تقديرات لمتغير الدراسة الرئيسي y_i بالاعتمـاد علـى المتغير المساعد، وتعرف هذه الطريقة بالمعاينة المضاعفة(المزدوجـة)(Double Sampling أو المعاينة ثنائية الطور(Tow-Phase Sampling) والتي أول مـن قدم نظريتها العالم **(Neyman,1938)**. إن هذه الطريقة تكون مربحة في إعطـاء دقة عالية لتقدير النسبة أو تقدير الانحدار أو أي تقدير أخر يحتوي على معلومـات مساعدة ، وذلك من خلال تقسيم المجتمع ذي حجم N تقسيماً طبقياً إلـى L مـن الطبقات، بعدها نقوم بسحب عينة عشوائية بسيطة بحجم n' من ذلك المجتمع تـتم بواسطتها دراسة المتغير المساعد x_i ومعرفة خصائصه، ومن ثم نقوم بسحب عينة عشوائية طبقية بحجم n من العينة الأولى بحيث أن $n < n'$ نقيس فيهـا المتغيـر الرئيسي تحت الدراسة y_i، وتكون العينة الثانية عينة جزئية من العينة الأولى هدفها دراسة خصائص المتغير الرئيسي. وقد استخدم العديد من الباحثين هذا الأسلوب في اقتراح ودراسة بعض المقدرات التي تعتمد في صياغتها علـى متوسـط المجتمـع المحـــدود علـــى ســـبيل المثـــال **(Srivstava,1967)**، **(Traat,2001),(Singh,1994)،Rao,1990)** ومـن الأمثلـة علـى تلـك المقدرات المقترحة سابقا"ما ياتي

$$\tilde{Y} = \bar{y}(\frac{\bar{x}}{\bar{X}})^{\alpha} \quad ;\tilde{Y}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{x}' - \bar{x}) \quad ;\tilde{Y}_{w} = \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{y}(\frac{\bar{x}_i}{\bar{X}_i})^{\alpha_i}$$

حيث أن $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$ يمثل متوسط المتغير الرئيسي ، $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ يمثل متوسط المتغير المساعد ، $i = 1,\cdots,k$ $\alpha_i ; w_i$ ثوابت و b يمثل معامل الانحدار وتمت دراسة خواص تلك المقدرات لغرض إعطاء أفضل تقدير إلى متوسط المجتمع المحدود.

في هذه الدراسة سيتم الاعتماد على التباين بدلاً من المتوسط لدراسة خواص بعض المقدرات الإحصائية المقترحة للنسبة والانحدار وباستخدام أسلوب المعاينة المضاعفة (ثنائية الطور) وبوجود متغير مساعد واحد أو متغيرين لغرض تقدير تباين المجتمع المحدود ثم تعميم تلك المقدرات المقترحة وذلك في حالة وجود K من المتغيرات المساعدة.

2-الجانب النظري:

ليكن $M = \{1,2,\cdots N\}$ وليكن مجتمع الدراسة المحدود ذا حجم ثابت مقداره N وليكن y_i متغير الدراسة الرئيسي الذي لديه تباين مجتمع غير معلوم يعرف حسب الصيغة $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y}_i)^2}{(N-1)}$، وليكن x_i متغير الدراسة الرئيسي ولديه تباين معلوم وهو $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X}_i)^2}{(N-1)}$ ولتكن n' تمثل حجم العينة الأولى الكبيرة المسحوبة من المجتمع M والتي يتم من خلالها تقدير تباين المتغير المساعد x_i حسب الصيغة $s_x'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n'}(x_i' - \bar{x}')^2}{(n'-1)}$ في حالة عدم وجود معلومات مسبقة عن تباينه.

لتكن n تمثل حجم العينة الثانية المسحوبة من العينة الأولى والتي يتم من خلالها التعرف على تباين العينة بالنسبة للمتغير y_i والمتغير x_i وهما على التوالي s_y^2 , s_x^2 .

2-1 المقدرات المقترحة:

كما أسلفنا سابقاً أن هدف البحث هو إيجاد تقدير إلى تباين المجتمـع المحـدود S_y^2 وذلك بالاعتماد على مقدري النسبة والانحدار وباسـتخدام المعلومـات المـساعدة والمتمثلة بالمتغير المساعد الأول x_1 والمتغير المساعد الثاني x_2 وعلى هذا الأساس نقترح المقدرات الاتية.

$$S_{ra}^2 = s_y^2 \frac{s_{x_1}'^2}{s_{x_1}^2} \qquad \cdots(1$$

$$S_{lr}^2 = s_y^2 + b\,(s_{x_1}'^2 - s_{x_1}^2) \qquad \cdots(2$$

$$S_w^2 = s_y^2 [\, w_1 \frac{s_{x_1}'^2}{s_{x_1}^2} + w_2 \frac{s_{x_2}'^2}{s_{x_2}^2} \,] \qquad \cdots(3$$

حيث أن w_2, w_1 أوزان وتحقق المعادلة $w_1 + w_2 = 1$

$$S_u^2 = s_y^2 (\frac{s_{x_1}'^2}{s_{x_1}^2})^a \qquad \cdots(4$$

حيث أن a كمية ثابتة

ولغرض دراسة تلك المقدرات سوف يتم تعريف بعض الصيغ الرياضية التي تسهل لنا إعادة صياغة تلك المقدرات في المعادلات الأربعة أعلاه بأسلوب رياضي سهل وكذلك تمكننا من تحديد خواصها بدقة جيدة وكما ياتي.

$$e_0 = \frac{s_y^2 - S_y^2}{S_y^2}, e_1 = \frac{s_{x_1}^2 - S_{x_1}^2}{S_{x_1}^2}, e_1' = \frac{s_{x_1}'^2 - S_{x_1}^2}{S_{x_1}^2}, e_2 = \frac{s_{x_2}^2 - S_{x_2}^2}{S_{x_2}^2}, e_2' = \frac{s_{x_2}'^2 - S_{x_2}^2}{S_{x_2}^2}$$

أن التوقع والتوقع المشترك للمتغير $e_i\ , i = 0,1,2$ والمتغير $e_i'\ , i = 1,2$ يمكـن تعريفهما حسب الصيغ الاتية وكما وردا عند **(Arcos & Rueda, 1997)**.

$$E(e_i e_i)=\begin{cases}(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})\,(B_i-1) & \forall \quad i=i\\ (\frac{1}{n}-\frac{1}{N})\,(\theta_{ii}-1) & \forall \quad i\neq i\end{cases}$$

$$E(e'_i e'_i)=\begin{cases}(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N})\,(B_i-1) & \forall \quad i=i\\ (\frac{1}{n'}-\frac{1}{N})\,(\theta_{ii}-1) & \forall \quad i\neq i\end{cases}$$

$$E(e_i e'_i)=\ (\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})\,(\theta_{ii}-1) \qquad \forall \quad i\neq i$$

حيث أن

$$B_i=\frac{\mu_{4,0(i,i)}}{\mu^2_{2,0(i,i)}},\ \theta_{ii}=\frac{\mu_{2,2(i,i)}}{\mu_{2,0(i,i)}\mu_{0,2(i,i)}} \quad \forall\, i\neq i\,;\quad \mu_{r,s(z,t)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(z_i-\bar{Z})^r(t_i-\bar{T})^s}{N}$$

2-2 خواص المقدرات المقترحة:

في هذا المبحث سيتم تحديد خواص تلك المقـدرات والمتمثلـة بـالتحيز $B(S^2_*)$ ومتوسط مربعات الخطأ $Mse(S^2_*)$ واللذين تم اشتقاقهما من مرتبة n^{-1} فقط وذلك بعد إعادة صياغة تلك المقدرات بأسلوب يُسهل لنا حساب التحيز ومتوسط مربعات الخطأ وكما ياتي.

*****بالنسبة للمقدرS^2_{ra} المعرف في المعادلة رقم **(1)** سيتم إعادة صياغته على الـشكل الاتي.

$$S^2_{ra}=S^2_y\ (1+e_0)\,(1+e'_1)\,(1+e_1)^{-1}$$

وعلية فأن التحيز ومتوسط مربعات الخطأ للمقدرS^2_{ra} تم حسابهما بالاعتماد علـى الصيغة أعلاه وهما على التوالي كما ياتي.

$$B(S^2_{ra})=S^2_y(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[(B_{x_1}-1)-(\theta_{yx_1}-1)] \qquad \cdots(5$$

$$Mse(S^2_{ra})=E(S^2_{ra}-S^2_y)^2$$

$$=S^4_y\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[(B_{x_1}-1)-2(\theta_{yx_1}-1)]\} \qquad \cdots(6$$

*****أما المقدرS^2_{lr} في المعادلة رقم**(2)** فأن خواصه سنناقشها في حالـة اعتبـار أن معامل الانحدار b كمية محددة سلفاً أي بمعنى أنها تبقى إلى حد ما ثابتـة، وكمـا ورد فـي الدراسـات الـسابقة والمعتمـدة علـى مـسوحات العينـات عنـد **(Cochran,1977)**نستطيع أن نأخذ قيمة تقديرية ثابتة لـ b تـساوي مـثلا b_0 وعليه فأن مقدار التحيز للمقدرS^2_{lr} تم حسابه وكما ياتي.

$$E(S_{lr}^2) = S_y^2 + b_0\, E(s_{x_1}'^2 - s_{x_1}^2)$$
$$= S_y^2 + b_0\, E_1\, E_2(s_{x_1}'^2 - s_{x_1}^2) = S_y^2 + b_0\, E_1(s_{x_1}'^2 - s_{x_1}'^2) = S_y^2$$

مما يدل على أن المقدر المقترح S_{lr}^2 غير متحيز بالنـسبة إلـى تبـاين المجتمـع المحدود S_y^2 ويتحقق هذا فقط عند ثبات معامل الانحدار b، وخلاف ذلـك يكـون المقدر S_{lr}^2 إما مهمل التحيز أو متحيزا. وعلى هذا الأساس فان تباين المقدر S_{lr}^2 سيتم حسابه حسب الطريقة الواردة عند **(Cochran,1977)** وكما ياتي.

$$Var(S_{lr}^2) = E_1\, Var_2\,(S_{lr}^2) + Var_1\, E_2\,(S_{lr}^2)$$
$$E_1\, Var_2\,(S_{lr}^2) = (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[S_y^4(B_y - 1) + b_0^2\, S_{x_1}^4\,(B_{x_1} - 1) - 2b_0\, S_y^2\, S_{x_1}^2\,(\theta_{yx_1} - 1)]$$
$$Var_1\, E_2\,(S_{lr}^2) = (\tfrac{1}{n'} - \tfrac{1}{N})\, S_y^2\,(B_y - 1)$$
$$Var(S_{lr}^2) = (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[\,S_y^4(B_y - 1) + b_0^2\, S_{x_1}^4\,(B_{x_1} - 1) - 2b_0\, S_y^2\, S_{x_1}^2\,(\theta_{yx_1} - 1)]$$
$$+ (\tfrac{1}{n'} - \tfrac{1}{N})\, S_y^2\,(B_y - 1) \qquad \cdots(7$$

أن الحصول على اصغر تباين للمقدر S_{lr}^2 يتم من خلال أيجاد أفضل قيمة لمعامـل الانحدار b_0 الثابتة تجعل ذلك التباين اصغر ما يمكن ويتحقق هذا بالاشتقاق الجزئي للمعادلة رقم**(7)** نسبة إلى b_0 وعلى هذا الأساس فان قيمة b_0 هي.

$$\hat{b}_0 = S_y^2(\theta_{yx_1} - 1) / S_{x_1}^2\,(B_{x_1} - 1) \qquad \cdots(8$$

وبتعويض المعادلة رقم**(8)** في المعادلة رقـم**(7)** نحـصل علـى اصـغر تبـاين للمقدر S_{lr}^2 وكما مبين في المعادلة رقم**(9).**

$$Var(S_{lr}^2)_{\min} = S_y^4\,\{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[\,(B_y - 1) - \frac{(\theta_{yx_1} - 1)^2}{(B_{x_1} - 1)}] + (\tfrac{1}{n'} - \tfrac{1}{N})\,(B_y - 1)\} \cdots(9$$

*****أما المقدر S_w^2 في المعادلة **(3)** فنستطيع إعادة صياغته حسب الشكل الاتي.

$$S_w^2 = S_y^2\,(1 - e_0)[w_1\,(1 - e_1')\,(1 + e_1)^{-1} + w_2\,(1 - e_2')\,(1 + e_2)^{-1}]$$

وأما مقدار التحيز ومتوسط مربعات الخطأ للمقدر S_w^2 فهما على التوالي.

$$B(S_w^2)=S_y^2(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[w_1(B_{x_1}-1)+w_2(B_{x_2}-1)-w_1(\theta_{yx_1}-1)-w_2(\theta_{yx_2}-1)] \quad \cdots(10$$

$$Mse(S_w^2)=E(S_w^2-S_y^2)^2$$
$$=S_y^4\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[w_1^2(B_{x_1}-1)+w_2^2(B_{x_2}-1)-2w_1$$
$$(\theta_{yx_1}-1)-2w_2(\theta_{yx_2}-1)+2w_1w_2(\theta_{x_1x_2}-1)]\} \quad \cdots(11$$

ولغرض تصغير Mse بالنسبة للمقدر S_w^2 فيتم من خلال أيجاد أفضل قيم إلى الأوزان w_2, w_1 وذلك بالاعتماد على المعادلة رقم **(11)** وبالاشتقاق الجزئي لتلك المعادلة بالنسبة إلى الأوزان مع مراعاة الشرط المتقدم سلفاً وهو أن $w_1+w_2=1$ نحصل على القيم التقديرية لهذه الأوزان وهي على التوالي.

$$\hat{w}_1=\frac{(B_{x_2}-1)(\theta_{yx_1}-1)-(\theta_{yx_2}-1)(\theta_{x_1x_2}-1)}{(B_{x_1}-1)(B_{x_2}-1)-(\theta_{x_1x_2}-1)^2} \quad \cdots(12$$

$$\hat{w}_2=\frac{(B_{x_1}-1)(\theta_{yx_2}-1)-(\theta_{yx_1}-1)(\theta_{x_1x_2}-1)}{(B_{x_1}-1)(B_{x_2}-1)-(\theta_{x_1x_2}-1)^2} \quad \cdots(13$$

وبتعويض المعادلتين **(12)** و**(13)** بالمعادلة **(11)** نحصل على اصغر متوسط مربعات خطأ بالنسبة للمقدر S_w^2 وكما معرف في المعادلة **(14)**.

$$Mse(S_w^2)_{\min}=S_y^2\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)-(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})\times$$
$$\frac{(B_{x_1}-1)(\theta_{yx_2}-1)^2+(B_{x_2}-1)(\theta_{yx_1}-1)^2-2(\theta_{yx_1}-1)(\theta_{yx_2}-1)(\theta_{x_1x_2}-1)}{(B_{x_1}-1)(B_{x_2}-1)-(\theta_{x_1x_2}-1)^2}\} \cdots(14$$

***أما المقدر** S_u^2 في المعادلة **(4)** كذلك فنستطيع إعادة كتابته حسب الشكل الاتي:

$$S_u^2=S_y^2(1+e_0)(1+e_1')^a(1+e_1)^{-a}$$

أن التحيز ومتوسط مربعات الخطأ للمقدر S_u^2 تم اشتقاقهما وهما على التوالي.

$$B(S_u^2) = (S_u^2/2)\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[a^2(B_{x_1}-1)-2a(\theta_{yx_1}-1)]+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})a(B_{x_1}-1) - (\tfrac{1}{n'}-\tfrac{1}{N})a(B_{x_1}-1)\} \quad \cdots(15$$

$$Mes(S_u^2) = E(S_u^2 - S_y^2)^2 = S_y^4\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[a^2(B_{x_1}-1)-2a(\theta_{yx_1}-1)]\} \quad \cdots(16$$

ولغرض الحصول على اقل Mse بالنسبة للمقدر S_u^2 فيجب أن نحصل على قيمه تقديرية للقيمة الثابتة a تجعل Mse للمقدر S_u^2 اصغر ما يمكن وذلك من خلال الاشتقاق الجزئي للمعادلة رقم **(16)** بالنسبة إلى a وعلية فأن القيمة التقديرية لها هي.

$$\hat{a} = \frac{(\theta_{yx_1}-1)}{(B_{x_1}-1)} \quad \cdots(17$$

وبتعويض المعادلة **(17)** في المعادلة **(16)** نحصل على اصغر متوسط مربعات خطأ للمقدر S_u^2 وكما ياتي.

$$Mse(S_u^2)_{\min} = S_y^4[(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)-(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})\frac{(\theta_{yx_1}-1)^2}{(B_{x_1}-1)}] \quad \cdots(18$$

تجدر الملاحظة إلى أن المقدر المقترح S_{ra}^2 هو حالة خاصة من المقدر المقترح S_u^2 عندما تكون قيمة $a=1$ حيث يلاحظ أن كلا من التحيز ومتوسط مربعات الخطأ للمقدر S_u^2 في المعادلتين **(15)** و**(16)** هي نفسها بالنسبة للمقدر S_{ra}^2 والمعرفة بالمعادلتين**(5)** و**(6)** عندما نعوض عن قيمة الثابت a بالواحد الصحيح.

3-2 تعميم المقدرات المقترحة:

هنالك العديد من المسوحات الإحصائية توفر لنا معلومات عن أكثر من متغير مساعد له علاقة بدرجة معينة مع المتغير الرئيسي، مما يجب علينا أن نستفيد من تلك المعلومات في إيجاد مقدر يمتلك خواص جيدة، وعلية فإذا كان لدينا K من المتغيرات المساعدة $x_1, x_2, \cdots x_k$ نستطيع أن نعمم المقدرات في المعادلات**(2)** و **(3)**و**(4)** على النحو الاتي مع مراعاة الملاحظة الخاصة بالمقدر المقترح الأول مع الرابع حيث سيتم تعميم المقدر المقترح الرابع كون الأول حالة خاصة منة وذلك لغرض إيجاد أفضل تقدير إلى تباين المجتمع المحدود بالمعاينة المضاعفة وكما ياتي.

$$\widetilde{S}_{lr}^2 = s_y^2 + \sum_{j=1}^{k} b_j (s_{x_j}'^2 - s_{x_j}^2)$$

$$\widetilde{S}_w^2 = s_y^2 \sum_{j=1}^{k} w_j \frac{s_{x_j}'^2}{s_{x_j}^2}$$

$$\widetilde{S}_u^2 = s_y^2 \prod_{j=1}^{k} (\frac{s_{x_j}'^2}{s_{x_j}^2})^a$$

حيث أن

s_y^2 يمثل تباين العينة بالنسبة للمتغير y .

$s_{x_j}'^2, j = 1,2,\cdots,k$ تمثل تباين العينة للقياسات x_j' وبحجم n' .

$s_{x_j}^2, j = 1,2,\cdots,k$ تمثل تباين العينة للقياسات x_j وبحجم n .

$w_1, w_2, \cdots, w_k$ أوزان وتحقق الشرط الاتي $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$

كذلك $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ثوابت.

2-4 خواص المقدرات المعممة:

لغرض معرفة خواص المقدرات المعممة الثلاثة المذكورة انفا لابد من إعطاء بعض التعاريف الاتية التي تسهل لنا معرفة تحيز ومتوسط مربعات الخطأ لكل من المقدرات المعممة فيما تقدم ومن مرتبة n^{-1}.

ليكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة ذو بعد $k \times k$ حيث أن $a_{ij} = (\theta_{x_i x_j} - 1)$,$ij = 1,2,\cdots,k$ ،

$b' = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ متجه صفي ذو بعد $1 \times k$ حيث أن $b_j = (\theta_{yx_j} - 1)$, $j = 1,2,\cdots,k$ ،

$W' = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ متجه الأوزان ذات بعد $1 \times k$، $a' = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ متجه الثوابت ذو بعد $1 \times k$ وكذلك $e' = (1,1,\cdots,1)$ متجه صفي ذو بعد $1 \times k$ من الواحدات.

بالنسبة للمقدر $\widetilde{S}^2_{lr}$ سيتم حساب التوقع والتباين له على أساس أن معامل الانحدار ثابت أي $b_j = b_{0j}$, $j = 1,2,\cdots,k$ وكما ياتي.

$$E(\widetilde{S}^2_{lr}) = S^2_y + \sum_{j=1}^{k} b_{0j} E(s'^2_{x_j} - s^2_{x_j})^2 = S^2_y$$

مما يدل على أن المقدر $\widetilde{S}^2_{lr}$ غير متحيز بالنسبة إلى تباين المجتمع S^2_y.

أما التباين فيعرف حسب الصيغة الاتية.

$$Var(\widetilde{S}^2_{lr}) = E_1\, Var_2(\widetilde{S}^2_{lr}) + Var_1\, E_2(\widetilde{S}^2_{lr})$$

$$Var(\widetilde{S}^2_{lr}) = (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})\{S^4_y(B_y - 1) + \sum_{j=1}^{k} b^2_{0j}[S^4_{x_j}(B_{x_j} - 1) + S^4_{x'_j}(B_{x'_j} - 1) + 2S^2_{x_j}S^2_{x'_j}$$
$$(\theta_{x_j x'_j} - 1)] - 2\sum_{j=1}^{k} b^2_{0j} S^2_y S^2_{x_j}(\theta_{yx_j} - 1) - 2\sum_{j=1}^{k} b^2_{0j} S^2_y S^4_{x'_j}(\theta_{yx'_j} - 1)]\} +$$
$$(\tfrac{1}{n'} - \tfrac{1}{N}) S^4_y (B_y - 1) \qquad \cdots(19$$

أما المقدر $\widetilde{S}^2_w$ فأن مقدار التحيز له ومتوسط مربعات الخطأ سيتم اشتقاقهما بالاعتماد على المعادلتين**(10) و(11)** وكما ياتي.

$$B(\widetilde{S}_w^2) = S_y^2(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})\sum_{j=1}^{k} w_j[(B_{x_j} - 1) - (\theta_{yx_j} - 1)] \quad \cdots(20$$

$$Mse(\widetilde{S}_w^2) = S_y^4\{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{N})(B_y - 1) + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} w_i w_j(\theta_{x_i x_j} - 1) - 2\sum_{j=1}^{k} w_j(\theta_{yx_j} - 1)]\} \cdots(21$$

ويمكن إعادة صياغة $Mse(\widetilde{S}_w^2)$ بصيغة المصفوفات وكما ياتي.

$$Mse(\widetilde{S}_w^2) = S_y^4\{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{N})(B_y - 1) + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[W'AW - 2W'b]\} \quad \cdots(22$$

ولغرض الحصول على اصغر $Mse(\widetilde{S}_w^2)$ تم استخدام طريقة لاكرانك للحصول على أفضل قيم للمتجه الأوزان W بحيث أن $W'e = 1$ والتي تجعل $Mse(\widetilde{S}_w^2)$ اصغر ما يمكن وعلى هذا الأساس فأن متجه الأوزان المقدر هو.

$$\hat{W} = A^{-1}b - H\,A^{-1}e \quad \cdots(23$$

حيث أن

$$H = \frac{b'A^{-1}e - 1}{e'A^{-1}e}$$

وبتعويض المعادلة رقم**(23)** في المعادلة رقم**(22)** نحصل على اصغر Mse إلى المقدر $\widetilde{S}_w^2$

$$Mse(\widetilde{S}_w^2)_{\min} = S_y^4\{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{N})(B_y - 1) + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n'})[H^2 e'A^{-1}e - b'A^{-1}b]\} \quad \cdots(24$$

أما التحيز ومتوسط مربعات الخطأ للمقدر $\widetilde{S}_u^2$ فسيتم اشتقاقهما بالاعتماد على المعادلتين **(15) و (16)** على التوالي.

$$B(\tilde{S}_u^2)=(S_u^2/2)\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[\sum_{j=1}^{k}a_j^2(B_{x_j}-1)-2\sum_{j=1}^{k}a_j(\theta_{yx_j}-1)+\sum_{i\neq j}^{k}a_ia_j(\theta_{x_ix_j}-1)]$$

$$+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})\sum_{j=1}^{k}a_j(B_{x_j}-1)-(\tfrac{1}{n'}-\tfrac{1}{N})\sum_{j=1}^{k}a_j(B_{x_j}-1)\} \qquad \cdots(25$$

$$Mse(\tilde{S}_a^2)=S_y^4\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[\sum_{j=1}^{k}a_j^2(B_{x_j}-1)-2\sum_{j=1}^{k}a_j(\theta_{yx_j}-1)$$

$$+\sum_{i\neq j}^{k}a_ia_j(\theta_{x_ix_j}-1)]\} \qquad \cdots(26$$

وباستخدام أسلوب المصفوفات سنعيد كتابة المعادلة**(26)** بالصيغة الاتية.

$$Mse(\tilde{S}_u^2)=S_y^4\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})[a'Aa-2a'b]\} \qquad \cdots(27$$

ولغرض الحصول على اصغر Mse يجب أن نستخرج أفضل قيم إلى a تجعل $Mse(\tilde{S}_u^2)$ ما يمكن ويتم ذلك من خلال الاشتقاق الجزئي للمعادلة**(27)** نسبة إلى a ومنها نحصل.

$$\hat{a}=A^{-1}b \qquad \cdots(28$$

وبتعويض المعادلة**(28)** في المعادلة**(27)** نحصل على اصغر متوسط مربعات خطأ إلى $\tilde{S}_u^2$ وهو

$$Mse(\tilde{S}_u^2)_{\min}=S_y^4\{(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{N})(B_y-1)-(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n'})\,b'A^{-1}b\} \qquad \cdots(29$$

3- الجانب التطبيقي:

إن عملية مقارنة أي من المقدرات المقترحة هي الأفضل في تقدير تباين المجتمع المحدود يتطلب منا إجراء حسابات عددية ليتسنى لنا المقارنة فيما بين تلك المقدرات وعلى هذا الأساس تم الاعتماد على بيانات المثال الموجود عند**(Ahmed,1997)** والمتضمنة معلومات عن **332** قرية زراعية أخذت من النشرة الإحصائية الهندية لسنة**(1981)** اذ تم اختيار المعلومات الاتية منها.

$y=$ عدد الأشخاص المتعلمين في القرية ويمثل متغير الدراسة الرئيسي.

$x_1=$ عدد الفلاحين في القرية ويمثل المتغير المساعد الأول.

$x_2=$ عدد السكان في القرية ويمثل المتغير المساعد الثاني.

وتم استخدام طريقتين في التطبيق، الطريقة الأولى اعتمدنا فيها على البيانات المتوفرة لدينا مباشرةً في حساب صيغ التحيز واقل متوسط مربعات خطأ تم التوصل إليها ولجميع المقدرات المقترحة وحسب الصيغ الواردة في المعادلات**(5)،(6)،(9)،(10)،(14)،(15)** و**(18)** على التوالي، وكذلك تم حساب الكفاءة النسبية $PRE(S_*^2)$ لكل مقدر وحسب الصيغة الاتية.

$$PRE(S_*^2)=\frac{Mse(S_y^2)}{Mse(S_*^2)}\times 100 \qquad \cdots(30$$

والجدول **(1)** يبين نتائج التطبيق الأول.

أما الطريقة الثانية فقد تم الاعتماد على أسلوب المحاكاة في حساب المقدرات المقترحة وحسب الصيغ الواردة في المعادلات**(1)،(2)،(3)** و**(4)** على التوالي وذلك من خلال.

1)سحب عينة عشوائية بسيطة أولية بحجم $n' = 200$ من تلك البيانات.

2)سحب عينة عشوائية ثنائية الطور من العينة الأولى وبحجم $n = 80$.

3)استخدام العينات في الخطوة الأولى والثانيـة لغـرض أيجـاد قـيم للمقـدرات المقترحة S_*^2 .

4)إعادة الخطوات**(1),(2) و(3) 1500** دوره فنحصل على **1500** قيمة من S_*^2 ولكل مقدر.

5)حساب التحيز ومتوسط مربعات الخطأ والكفاءة النسبية لكل مقدر**.**

والجدول **(2)** يبين نتائج التطبيق الثاني.

الجدول**(1)** يبين نتائج $Mse(S_*^2)_{\min}$ ، $PRE(S_*^2)$ ، $Bias$ بالاعتماد على الطريقة الأولى

Estimator	Auxiliary Variables	$Mse(S_*^2)_{\min}$	$PRE(S_*^2)$	$Bias$
s_y^2	----	5.232E+10	100.00	0
S_{ra}^2	x_1	7.203E+10	72.64	43492.70
S_{ra}^2	x_2	6.618E+10	79.06	35559.10
S_{lr}^2	x_1	4.231E+10	123.66	0
S_{lr}^2	x_2	4.229E+10	123.72	0
S_w^2	$x_1 \& x_2$	4.229E+10	123.72	1099.19
S_u^2	x_1	4.231E+10	123.66	81.96
S_u^2	x_2	4.229E+10	123.72	63.56

الجدول**(2)** يبين نتائج $Mse(S_*^2)_{\min}$ ، $PRE(S_*^2)$ ، $Bias$ بالاعتماد على الطريقة الثانية

Estimator	Auxiliary Variables	$Mse(S_*^2)_{\min}$	$PRE(S_*^2)$	$Bias$
s_y^2	----	6.99E+10	100.00	0
S_{ra}^2	x_1	2.88E+11	24.25	55118.12
S_{ra}^2	x_2	9.34E+10	74.85	45788.18
S_{lr}^2	x_1	4.88E+10	143.21	0
S_{lr}^2	x_2	4.72E+10	148.13	0
S_w^2	x_1 & x_2	4.67E+10	149.72	2001.22
S_u^2	x_1	4.88E+10	143.21	55.08
S_u^2	x_2	4.72E+10	148.13	34.12

4- الاستنتاجات:

من خلال النتائج التي تم التوصل إليها في الجدولين المذكورة انفا نستطيع ملاحظة النقاط الاتية.

1) أن المقدرات المقترحة الثلاثة S_{lr}^2 ، S_w^2 ، S_u^2 لها كفاءة نسبية أعلى في تقدير تباين المجتمع المحدود s_y^2 من المقدر S_{ra}^2 مما يدلل على أهمية تلك المقدرات الثلاثة في تمثيل تباين المجتمع المحدود .

2) أن المقدر المقترح S_{lr}^2 والمقدر S_u^2 متساويان في الكفاءة النسبية، وكذلك نلاحظ أن $Var(S_{lr}^2)_{\min} - Mse(S_u^2)_{\min} = 0$ مما يدل على تساوي مقدر الانحدار المقترح S_{lr}^2 مع المقدر المقترح S_u^2 ، ومع ثبات معمل الانحدار b يصبح مقدر الانحدار غير متحيز مما يجعل له الأفضلية على بقية المقدرات ولكن عندما لا يتحقق هذا الثبات لمعامل الانحدار يصبح المقدر S_u^2 أفضل المقدرات كونه يمتلك اقل متوسط مربعات خطأ واقل تحيز بين المقدرات الأخرى.

3) أن المقدر S_{ra}^2 هو حالة خاصة من المقدر S_u^2 عندما $a=1$ وأظهرت النتائج أن المقدر S_{ra}^2 ليس أفضل من المقدر S_u^2 وذلك بسبب وجود الثابت a مما يدل على أهمية الثابت a في إعطاء كفائه عالية للمقدر في حالة وجودها، وكذلك الحال بالنسبة للأوزان w_2, w_1 عند المقدر S_u^2.

4) إن مقدار الاختلاف في نتائج متوسط مربعات الخطأ والتحيز عند استخدام المتغير المساعد الأول عن النتائج في حالة استخدام المتغير المساعد الثاني للمقدرات S_u^2 ، S_{lr}^2 ، S_{ra}^2 يرجع إلى مقدار ارتباط المتغيرين المساعدين مع المتغير الرئيسي فكلما زاد الارتباط تصبح النتائج أدق مما يدال على أهمية المعلومات المساعدة في التقدير.

المصادر:

1) Ahmed, M.C,(1997),The general class of chain estimators for the ratio two means using double sampling, *Commu.Statist-Theory M*eth, 26(9), 2247-2254.
2) Arcos, C.A & Ruede, G.M.,(1997),Variance estimation using aux- iliary information an almost unbiased multivariate ratio estimator, *Matrika,Vol.45,PP.171-178.*
3) Cochran, W.G.,(1977),Sampling Techniques, third edition. John *Wiley & Sons*.
4) Neyman, J.,(1938),Contribution to theory of sampling human pop- ulation, *Jour.Amer.Stat.Asso,Vol.33,PP.101-116.*
5) Rao,J.N.K. & Kovar, J.G.,(1990),On estimating distribution func- tion and quintiles form survey data using auxiliary information, *Biometrika*, *Vol.77,2,PP.365-375.*
6) Singh, M.P.,(1994), Comparison of some ratio cum product estim- ators, *Sankhy$\bar{a}$,Vol.31,B.PP.375-378.*
7) Srivastava, S.K.,(1967),An estimator using auxiliary information in sample surveys, *Cal.Stat.Assc,Vol.16,PP.121-132.*
8) Traat, Imbi,(2001),Statistical inference in sampling theory, *Theory of Stochastic Processes, Vol. 7(23),PP.301-316.*