المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (13) 2008
ص ص [1–9]

دراسة مقارنة بين الطرائق العددية الكلاسيكية وطرائق المونت كارلو

باسل يونس ذنون* عبد الكريم إبراهيم شيت**

الملخص

لقد ظهرت في الآونة الأخيرة اهتمامات واسعة بطرائق المونت كارلو لمعالجة مختلف المسائل العلمية والتقنية .ونتناول في هذا البحث استخدام طرائق المونت كارلو في التكامل العددي ، إذ تجرى مقارنة عامة بين الطرائق الكلاسيكية للتكامل العددي وطرائق المونت كارلو. كما تم تطبيق طريقة المعاينة الإحصائية لحساب القيم التقديرية لعدد من التكاملات العددية وتبين من خلالها كفاءة طرائق المونت كارلو في معالجة مثل هذه المسألة المهمة.

A comparative study between Classical Numerical Methods and Monte Carlo Methods

ABSTRACT

Recently, there is a great interest in the methods of Monte Carlo used for the treatment of different technical and scientific issues. This research deals with using the Monte Carlo methods in numerical integration by making a general comparison between the classical methods of integration and the Monte Carlo methods. The research also applies the statistical sampling method to compute the approximated values of a number of numerical integrations. By doing so, we conclude that the Monte Carlo methods are efficient in treating such important issues.

* استاذ/ قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسبات والرياضيات
** استاذ مساعد/ قسم الرياضيات/ كلية التربية الاساسية.
تاريخ التسلم : 2007/6/4 ـــــــــــــــــــــــــتاريخ القبول : 2007/9/26

1. مقدمة Introduction :

إن طرائق المونت كارلو هي طرائق محاكاة إحصائية عددية لأنظمة أحادية البعد أو متعددة الأبعاد، إذ تستبدل المسالة المحددة بأخرى عشوائية لها نفس الحل. وتستخدم طرائق المونت كارلو عند فشل الطرائق التحليلية وطرائق التكامل العددي الكلاسيكية Numerical Integration (***NI***) Methods المحددة في إيجاد الحـل المناسب لمسألة ما. إن طرائق المونت كارلو تتصف بالخاصية العشـوائية كجـزء رئيس من خوارزمية الطريقة ذات الطابع التكراري من أجل الوصول إلـى الحـل التقريبي لمسألة ما. إن تكامل المونت كارلو هو أسلوب عددي جديد يعتمـد علـى ركائز من كل من نظرية الاحتمال وأسلوب المحاكاة ويعد أحد الاستخدامات الجيدة لطرائق المونت كارلو (Sabelfeld, 2004). وبإيجاز شديد فان طرائق المونـت كارلو تعد الخيار الأخير، إذ أنها تقدم الحل لأي تكامل مهما كانت ظروفه وأبعـاده (Okten, 1999).

إن طرائق المونت كارلو عبارة عن مهارة تقدير التوقع الرياضي لدالة بوساطة وسط عينة مؤلفة من $\boldsymbol{n}$ من المشاهدات $x_1, x_2, \dots, x_n$ المولـدة مـن توزيـع احتمالي معين ضمن فترة التكامل من اجل حساب القيمة التقديرية لتكامـل معـين (Press et al., 1992)، ومن أدبيات موضوع تكامل المونت كارلو الدراسة التـي قام بها الباحثون (Giordano et al., 2003) والتي تبين إمكانية حسـاب حجـوم الأجسام المختلفة. كما أشار الباحث (Morton, 2001) في دراسـته لموضـوع تكامل المونت كارلو إلى إمكانية استخدام طرائق تكامل المونت كارلو فـي إيجـاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة التصادفية وذلك عن طريق استخدام طريقة المعاينـة الخارجية وطرائق المعاينة الداخلية، وهناك العديد من الدراسـات المتعلقـة بهـذا الموضوع.

2. تكامل المونت كارلو (*MCI*) Monte Carlo Integration :

يعتبر حساب القيم التقديرية للتكاملات من الاستخدامات الشـائعة لطرائـق المونت كارلو. إن فكرة تكامل المونت كارلو بسيطة، إذ تتم معاينة الدالـة المـراد تكاملها عند ***n*** من النقاط الموزعة عشوائيا ومن التوزيع المنـتظم ضـمن داخـل منطاق لتكامل، بعدها يضرب الوسط الحسابي لقيم الدالة بمساحة المنطاق من اجـل الحصول على مقدر التكامل. وتسمى هذه الطريقة بطريقة المعاينـة الإحصـائية Statistical Sampling Method (***SSM***) وهي مبنية علـى نظريـة القيمـة الوسطى لحسبان التفاضل والتكامل.

لقد أشار الباحثون (Gould et al., 2001) إلى أن طرائق تكامل المونت كارلو تزداد دقة كلما ازداد عدد أبعاد التكامل وأن معدل تقـارب هـذه الطرائـق يتناسب عكسيا مع الجذر ألتربيعي لحجم العينة، ويمكن زيادة دقة مقـدرات هـذه الطرائق بأساليب مختلفة منها أساليب المعاينة وأساليب المتغيرات. وتعلل طرائـق تكامل المونت كارلو حسب قانون الأعـداد الكبيـرة Law of large numbers والذي ينص على انه إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ مشاهدات مستقلة، وإذا كانت **g** هي دالة مستمرة عندئذ (Press et al., 1992) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = E\,[\,g(\bar{x})\,] \qquad (1)$$

باحتمالية مقدارها واحد، وأن :

$$\mathrm{var}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad (2)$$

إذ أن $\sigma_x^2 = \mathrm{var}(x_i)$ وأن $\bar{x}$ يمثل معدل العينة . وإذا كان σ_x^2 غير معروف فيمكننا استخدام المقدر غير المتحيز unbiased estimator

$$\hat{\sigma}_x^{\,2} = (n-1)^{-1}\sum_{i-1}^{\wedge}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (3)$$

من اجل حساب القيمة التقديرية للقيمة المتوقعة للدالة g(x) فأننا نحتاج إلى توليـد عينة من الأعداد العشوائية $x_1, x_2, ... x_n$ من توزيع المتغير العشـوائي x ثـم نقوم بمساواة المعدل النظري للدالة g(x) بمقدره ، أي أن (Morton, 2001):

$$E[g(x)] \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \hat{I}(n) \qquad (4)$$

وبفرض أن x يتبع التوزيع المنتظم U[0, 1] فان

$$E[g(x)] = \int_0^1 g(x)dx \qquad (5)$$

ولو كان x ~ U[a, b] فان

$$E[g(x)] = (b-a)^{-1}\int_a^b g(x)dx \qquad (6)$$

ومن المعادلتين (4) و(6) نحصل على أن :

$$I = \int_a^b g(x)\,dx \cong \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

$$= \hat{I}(n) \qquad (7)$$

والصيغة الأخيرة تمثل القيمة التقديرية للتكامل ***I***.

الجدول(1) يوضح مقارنة بين طرائق تكامل المونت كارلو والطرائق العددية الكلاسيكية.

الجدول (1) : مقارنة طرائق تكامل المونت كارلو مع الطرائق العددية الكلاسيكية.

الطرائق العددية الكلاسيكية	طرائق المونت كارلو
1. تستخدم متعددات الحدود عند حساب القيمة التقديرية للتكامل (Stokes , 2004).	**1.** تستخدم متتابعة من الأعداد العشوائية عند حساب القيمة التقديرية للتكامل (Stokes , 2004).
2. مقدر هذه الطرائق هو كمية ثابتة (Press et al.,1992) .	**2.** مقدر المونت كارلو هو متغير عشوائي متسق وغير متحيز (Press et al.,1992).
3. مقدار الخطأ المطلق يزداد بازدياد عدد متغيرات المسألة (Ferguson, 2002).	**3.** مقدار الخطأ المطلق يتناقص بازدياد عدد متغيرات المسألة (Ferguson, 2002).
4. عدد مرات حساب الدالة المراد تكاملها ينمو نموا أسيا (Burden et al., 2001).	**4.** عدد مرات حساب الدالة المراد تكاملها ينمو نموا خطيا (Burden et al., 2001).
5. يشترط أن يكون عدد متغيرات المسألة صغيرا (Press et al.,1992).	**5.** لا تحدث هذه الخاصية في طرائق المونت كارلو (Press et al.,.1992).

3- تطبيقات :

نتناول في هذا المبحث مجموعة من التكاملات المعروفة القيمة ، كي نأخذ فكرة دقيقة عن كفاءة طريقة المعاينة الإحصائية ***SSM*** ومقارنتها مع قاعدة سمبسون Simpson Rule (***SR***)، و تشمل هذه المجموعة التكاملات (Finney et al., 2001) و(Anton et al., 2002):

$$I_1 = \int_{-5}^{5} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_2 = \int_{0}^{3} \left|3 - x^2\right| dx$$

$$I_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan^5(x)\sec^4(x)\, dx$$

$$I_4 = \int_{0}^{\pi} (\sin(x) + 1/3\sin(3x))\, dx \qquad I_5 = \int_{6}^{10} \left|\sin(2x)\right| e^{-x/2}\, dx$$

وكما هو واضح فان هذه التكاملات هي لدوال مستمرة على منطلق التكامل ، وسوف نستخدم قاعدة سمبسون وطريقة المعاينة الإحصائية لحساب القيمة التقديرية لهذه التكاملات.

الجدول (2) يوضح القيم المضبوطة والتقديرية فضلا عن قيم الخطأ المطلق $\left|I - \hat{I}(n)\right|$ للتكاملات $(I_5 - I_1)$ باستخدام قاعدة سمبسون ***SR*** وطريقة ***SSM***.

الجدول (2) : النتائج العددية للتكاملات $(I_5 - I_1)$.

التكامل وقيمته المضبوطة	القيمة التقديرية للتكامل باستخدام		الخطأ المطلق باستخدام	
	SR	***SSM***	***SR***	***SSM***
$I_1 = 2.747$	2.849	2.770	0.102	0.023
$I_2 = 6.928$	6.960	6.903	0.032	0.025
$I_3 = 14.625$	23.182	14.527	8.557	0.102
$I_4 = 2.222$	2.324	2.225	0.102	0.003
$I_5 =0.049$	0.066	0.049	0.017	0.000

نلاحظ من الجدول (2) أن القيم التقديرية للتكاملات باستخدام طريقة المعاينة الإحصائية هي أقرب الى الواقع وأكثر دقة من نظيرتها عند استخدام طريقة سمبسون حيث أننا نجد أن الخطأ المطلق عند استخدام طريقة المعاينة الإحصائية أقل من نظيره عند استخدام طريقة سمبسون وهذا مؤشر جيد على كفاءة طريقة المعاينة الإحصائية في إيجاد القيم التقديرية للتكاملات .

ولحساب القيمة التقديرية لتكاملات الدوال غير ألمستمرة على منطاق التكامل تستخدم طريقة المعاينة الإحصائية فقط إذ يتعذر إيجاد مقدرات هذه التكاملات باستخدام قاعدة سمبسون وغيرها من طرائق التكامل العددي بسبب عدم استمرارية الدوال المراد حساب تكاملها ضمن منطقة التكامل. وقد يلجأ البعض إلى استخدام أسلوب تغيير المتغيرات change of variable لتحويل هذه الدوال إلى دوال مستمرة ضمن منطقة التكامل وعندئذ يمكننا إيجاد الحلول العددية لتكاملات هذه الدوال باستخدام طرائق التكامل العددي الكلاسيكية ، وهذا الأسلوب لا يخلو من الصعوبات وهو أسلوب غير مرغوب فيه.

4- مناقشة :

تناول هذا البحث مسألة تكامل المونت كارلو، إذ عرضت طريقة المعاينة الإحصائية لغرض إيجاد القيمة التقديرية للتكاملات المختارة وتم إعداد برنامجين باستخدام نظام Maple 10 ووفق الطريقتين المذكورتين، فقد تم تطبيق البرنامجين على مجموعة من التكاملات، تضم خمسة تكاملات لدوال مستمرة على مناطق التكامل ، وقد تمت مقارنة النتائج العددية للطريقتين المستخدمتين في الحل، والخروج بنتيجة تؤكد ما ذكره الباحثون (Press et al., 1992) و (Okten, 1999) و (Burden et al., 2001) (Giordano et al., 2003) و (Stokes, 2004) وغيرهم من الباحثين، من أن طرائق المونت كارلو تستطيع دائما أن تقدم الحل لأي تكامل مهما كانت ظروفه وأبعاده وأن هذه الطرائق تعتبر الاختيار الامثل والمناسب وأنها الملاذ الأخير لإيجاد الحلول العددية لمسائل لا يمكن أو يصعب حلها بالطرائق العددية الكلاسيكية المعروفة خاصة عندما يكون عدد متغيرات المسألة كبيرا.

المصادر

1- Anton, Howard; Bivens, Irl and Davis, Stephen (2002), "**Calculus** ", Antonbooks, Inc., 7th Edition.

2- Burden, Richard L., Faires, J. Douglas and Reynolds, Albert G. (2001), "**Numerical Analysis** ", Prindle, Weber and Schmidt, 7th Edition.

3- Finney, Ross L., Weir, Maurice D. and Giordano, Frank R. (2001), " **Thomas' Calculus** ", Addison Wesley Longman, 10th Edition.

4- Ferguson, Don (2002), " **Numerical integration** ", Survey Report, MIT Press.

5- Gould, Harvey, Tobochnik, Jan and Christian, Wolfgang (2001), " **Numerical integration and Monte Carlo methods** ", Addison Wesley.

6-Giordano, Frank R.,Weir, Maurice D. and Fox ,William P. (2003),"**First Course in Mathematical Modeling** ", Brooks / cole, a division of Thomson Learning, Inc.

7- Morton, David (2001), " **Monte Carlo methods in stochastic programming : overview** ", Texas Univ. Press, Inc.`

8- Okten, Giray (1999), " **Contributions to the theory of Monte Carlo and Quasi Monte Carlo methods** ", Ph.D. Faculty of Claremont Graduate University.

9- Press W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. H. and Flannery, B. P.(1992), "**Numerical Recipes in C** ", Cambridge University Press, 2nd Edition.

10- Stokes, V. P. (2004), " **Monte Carlo simulation: basics** ", Survey Report, Uppsala Univ. Press.

11-Sabelfeld, K. K. (2004**),** "**Monte Carlo methods and applications** " The Netherlands Press.