

مقارنة بعض الاختبارات الخاصة بنموذج  
الانحدار الذاتي الطبيعي غير المستقر من الرتبة الاولى  
(دراسة محاكاة)

احلام احمد جمعة\*

عبدالمجيد حمزة الناصر\*

المستخلص

ان دراسة بناء النماذج وتحليلها اعطت للسلاسل الزمنية اهمية كبيرة ودورها الفعال في التخطيط الاقتصادي وفي التطبيقات الطبية والهندسية والمناخية والفيزيائية وغيرها. وان الكثير من السلاسل الزمنية سواء في الاقتصاد أو المالية هي عمليات غير مستقرة.

لذا تناول البحث نموذج الانحدار الذاتي الطبيعي  $AR(1)$  غير المستقر لما له من اهمية في عملية بناء وتحليل السلسلة الزمنية . واجراء المقارنة تجريبيا بين الاختبارات الخاصة بالاستقرارية في النماذج ذات الاتجاه القطعي واختبار جذر الوحدة لحالتي مع الاختبار المقترح لجذر الوحدة .

Comparison of Some Tests on Non-Stationary  
Gaussian AR (1)  
(A Simulation Study)

Abstract

A condense study was done on non-stationary Gaussian AR(1), concerning testing the stationarity, the unit root and deterministic trend model . A proposed test was given and a comparison was done using where some new results are obtained.

\* استاذ/كلية الادارة والاقتصاد/جامعة بغداد

\*\* استاذ مساعد/ كلية الادارة والاقتصاد/جامعة بغداد

## 1 - السلاسل الزمنية غير المستقرة Non- Stationary Time Series

ان دراسة بناء النماذج وتحليلها اعطت للسلاسل الزمنية اهمية كبيرة ودورها الفعال في استخدامها في التخطيط الاقتصادي وفي التطبيقات الجغرافية والهندسية والفيزيائية.

ويكون سلوك السلسلة الزمنية غير مستقر عندما تقع جذور المعادلة  $[\phi(B)=0]$  داخل دائرة الوحدة التي نصف قطرها واحد (Inside Unit Circle) وتدعى هذه بالسلاسل الزمنية غير المستقرة Non- Stationary Time Series.

فالباحثان (Fuller و Dickey)<sup>[3]</sup> تناولوا عام 1979 نماذج السلاسل الزمنية غير المستقرة Non Stationary Time Series Models التي لها صفة السير العشوائي Random Walk ودرسا ثلاثة أنواع لنماذج AR(1). تناولوا خصائص المقدر للمعلمة  $p$  تحت فرضية  $\rho = \pm 1$  ومقارنة قوة الاختبار باستخدام المحاكاة. ثم درسا في عام 1981 اختبار نسبة الامكان الاعظم Likelihood Ratio (LR) في نموذج AR(1) عند فرضية جذر الوحدة Unit Root. وبحثا في غاية التوزيعات لإحصاءات الاختبار تحت فرضية العدم واشتقاق LR لمعلمت النماذج المختلفة وحساب قوتها مع المقارنة.

كما توصل الباحثان Nelson و Plosser عام (1982)<sup>[4]</sup> الى أن الكثير من السلاسل الزمنية سواء في الاقتصاد أو المالية هي عمليات غير مستقرة. اما الباحثان (Dickey و Said)<sup>[10]</sup> فقد تطرقا عام 1984 إلى تطوير اختبار جذر الوحدة، وبيننا أن من الممكن تقريب نموذج ARIMA (p,1,q) عن طريق الانحدار الذاتي وان هذا يولد توزيعات مشابهة لتلك التي جدولها (Dickey) وذكرها (Fuller) (1976).

وتناول الباحثان (Toda و Oya)<sup>[8]</sup> عام 1998 طريقتين لاختبارات جذر الوحدة هما DF ومضاعف لاكرانج Lagrange Multiplier (LM) لسلسلة الانحدار الذاتي في اختبار فرضيتين لـ  $H_0$  الأولى عند احتواء السلسلة الزمنية على جذر الوحدة من دون انحراف Without Drift والثانية احتواء السلسلة

الزمنية على جذر الوحدة مع انحراف . واقترحا اختبارات لجذر الوحدة تجمع ما بين الطريقتين.

اما الباحث (Hansen)<sup>[7]</sup> فقد قدم عام 2002 دراسة تناول فيها السلاسل الزمنية الأحادية المتغير Univariate Time Series وتطرق إلى نموذج AR وإلى شروط الاستقرارية وجذر الوحدة متناولا نظرية DF وعلاقتها بـ ( ADF ) Augmented Dickey-Fuller عند افتراض  $\alpha_0 = 0$  التي تمثل معلمة الانحدار الخطي.

الى ذلك يهدف البحث الى اجراء مقارنة بين الاختبارات المستخدمة للسلاسل الزمنية غير المستقرة مع الاختبار المقترح والخاص بجذر الوحدة، والتي لها من اهمية في عملية بناء وتحليل السلسلة الزمنية مستخدما" في ذلك نموذج الانحدار الذاتي الطبيعي من الرتبة الاولى .

### 1-1 : السلسلة الزمنية غير المستقرة في الوسط الحسابي

يقصد بالسلسلة الزمنية غير المستقرة في الوسط الحسابي<sup>[2],[11]</sup> والتي ليس لها استقرارية بسبب كون الاتجاه العام (Trend) احد عناصرها، مما يجعل لها عدة اوساط تتذبذب حولها البيانات حتى عندما تكون السلسلة متجانسة. فهذه النماذج توصف بان لها سلوكاً غير مستقر ومتجانس (Non Stationary Homogeneous) وتصنف الى ما يلي:-

### 1. النماذج عشوائية الاتجاه والفروقات

#### Stochastic trend Models and Differencing

يتم اخذ عدد مناسب من الفروقات للعملية غير المستقرة في الوسط الحسابي ويكون باستخدام عامل الفروقات الخلفية (Backword Differences Operator) ويرمز له ( $\nabla$ ) ويكون:-

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B) Z_t$$

وقد تصبح السلسلة الزمنية مستقرة بعد اخذ (d) من الفروقات أي

$$W_t = \nabla^d Z_t \quad , \quad d \geq 1$$

معنى ذلك اذا كانت لدينا عملية انحدار ذات  $\Psi(B)$  التي توصف السلوك

الاتي:-

$$\Psi(B)Z_t = \phi(B)(1-B)^d Z_t$$

فان العملية اعلاه يمكن كتابتها بالصيغة الاتية:-

$$\Psi(B)Z_t = \phi(B)\nabla^d Z_t$$

$$i.e \phi(B)\nabla^d Z_t = a_t \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

ويطلق على الصيغة رقم (1-1) بنموذج الانحدار الذاتي المندمج

Integrated Autoregressive Model ويرمز له بـ IAR (p, d)

والذي هو حالة خاصة من ARIMA(p,d,q).

## 2: النماذج ذات الاتجاه القطعي Deterministic Trend Models

ان دالة الوسط الحسابي لعملية غير مستقرة ممكن ان تمثل

بالاتجاه القطعي Deterministic Trend عند الزمن [6],[11] وان هذه الدالة

$E(Z_t) = \mu_t$  الموجودة في الاتجاه الخطي Linear Trend معرفة على النحو

الاتي:-

$$\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t \quad \dots\dots\dots (1-2)$$

ومن الممكن هنا ان يستخدم نموذج الاتجاه القطعي الخطي

(Deterministic Linear Trend Model) وكما يأتي:-

$$Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + a_t \quad \dots\dots\dots (1-3)$$

$a_t$ : تمثل متتابعة التشويش الابيض White Noise بوسط حسابي يساوي صفراً

وتباين ثابت  $\sigma^2_\alpha$ .

وتسمى الصيغة رقم (1-3) بنموذج الاتجاه الزمني البسيط Simple Time Trend

Model.

ان الاخطاء العشوائية  $\{ a_t \}$  لها توزيعات طبيعية Gaussian عندها

تكون المقدرات لـ  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_0$  ايضاً طبيعية Gaussian. ويمكن اجراء الاختبارات

الاحصائية المعروفة لمختلف حجوم العينة.

وباستخدام نظرية الغاية المركزية Central Limit Theorem فان :-

$$\frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10}}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_1}} \text{ asymptotically } N(0,1) \quad \dots\dots\dots (1-4)$$

حالة اختبار الفرضية الآتية: [6]

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \alpha_1 = \alpha_{10} \\ v.s. H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_{10} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (1-5)$$

تستخدم الاحصاء الآتية:

$$t = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10}}{\left\{ \hat{\sigma}^2 [0 \quad 1] (t't)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots\dots (1-6)$$

$\hat{\sigma}^2$  : يمثل مقدر OLS لمعلمة  $\sigma^2$  وصيغته

$$\hat{\sigma}^2 = \left[ \frac{1}{n-2} \right] \sum_{t=1}^n (Z_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 t)^2 \quad \dots\dots\dots (1-7)$$

$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_0$  : تمثل مقدري OLS للمعلمتين  $\alpha_1, \alpha_0$  على التوالي

$t't$  : تمثل مصفوفة وتتضمن :-

$$t't = \sum_{i=1}^n t_i t_i' = \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & n(n+1)(2n+1)/6 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-8)$$

بضرب البسط والمقام بصيغة رقم (1-6) بالمقدار  $n^{3/2}$  فان

$$t = \frac{n^{3/2}(\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10})}{\left\{ \hat{\sigma}^2 \begin{bmatrix} 0 & n^{3/2} \end{bmatrix} (t't)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ n^{3/2} \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

وباستخدام المصفوفة الافتراضية الآتية: [6]

$$Z_t = \begin{bmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & n^{3/2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-9)$$

فان :-

$$t = \frac{n^{3/2}(\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10})}{\left\{ \hat{\sigma}^2 [0 \ 1] Z_t (t't)^{-1} Z_t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{1/2}}$$

وبما ان :-

$$\left[ Z_t^{-1} \left( \sum_{i=1}^n t_i t_i' \right) Z_t \right] \xrightarrow{p} Q \quad (p : \text{Converge In Probability})$$

حيث ان :-

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

وكذلك :-

$$Z_t (t't)^{-1} Z_t = \left[ Z_t^{-1} (t't) Z_t^{-1} \right]^{-1} \xrightarrow{p} Q^{-1} \dots\dots\dots (1-10)$$

وباستخدام الصيغة رقم (1-10) فان :-

$$t \xrightarrow{p} \frac{n^{3/2} (\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10})}{\left\{ \sigma^2 [0 \ 1] Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{1/2}}$$

$$t \xrightarrow{p} \frac{n^{3/2} (\hat{\alpha}_1 - \alpha_{10})}{\sigma \sqrt{q^{22}}} \quad \text{asymptotically } N(0,1) \quad \dots\dots\dots(1-11)$$

اذ ان  $q^{22}$  : يمثل العنصر ذا الموقع (2 \* 2) في مصفوفة Q\* .  
لذا فان الاختبار t لفرضية  $\alpha_1 = \alpha_{10}$  سيعطي استدلالاً معنوياً من الناحية التقريبية.

---

\* للمزيد من التفاصيل انظر المصدر رقم [6] .

## 1-2 جذر الوحدة في نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الاولى (السير العشوائي) Unit Root in the First Order Autoregressive Model (Random Walk)

يعتبر اختبار الجذور Roots من الاختبارات المهمة كونه يبين عدد الجذور المساوية الى الواحد التي تقابل عدد الفروقات اللازمة للسلسلة الزمنية لكي تتحول الى الاستقرارية. ان اسلوب اخذ الفروقات اللازمة كي تتحول السلسلة الزمنية الى الاستقرارية هو اسلوب غير دقيق الى حد ما، لكون احتمالية اخذ عدد من الفروقات اكثر من المطلوب يؤدي الى عدم دقة العمل لذا فان اختبار الجذور هو اسلوب لمعرفة عدد الفروقات اللازمة للسلسلة المدروسة بتطبيق الطرائق الاحصائية الخاصة بهذا الاختبار والذي بدوره يعطي نتائج افضل من الطريقة التقليدية (طريقة Differences).

ان الكثير من السلاسل الزمنية<sup>[6]</sup> ولا سيما الاقتصادية تكون افضل تمييزاً من خلال جذور الوحدة Unit Roots عن تمييزها بالطرائق الاخرى. وليبان ما اذا كانت السلسلة الزمنية لها جذر الوحدة فان المناقشة الآتية تكون ذات أهمية:-

ان بوجود - لكل عملية لجذر الوحدة - عملية مستقرة سيكون من المتعذر تمييزها من تمثيل جذر الوحدة لاي حجم. فان العملية المستقرة تكون موجودة من خلال وضع احد الجذور الذاتية Eigen Values بالقرب من الواحد. ولكن ليس بشكل مساو لها تماماً. لو كان لدينا ما يأتي:-

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : Z_t = Z_{t-1} + a_t \quad , \phi_1 = 1 \\ \text{v.s. } H_1: Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad , |\phi_1| < 1 \end{array} \right\} \dots(1-12)$$

ان الفترة L للتنبؤ المستقبلي للصيغة تحت فرضية H<sub>0</sub> هي:-

$$\hat{Z}_{t+L/t} = Z_t \dots(1-13)$$

وان متوسط مربعات الخطأ :-

$$E(Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L/t})^2 = L\sigma^2 \dots(1-14)$$

بينما التنبؤ المستقبلي للصيغة تحت الفرضية البديلة  $H_1$  فتكون

$$\hat{Z}_{t+L/t} = \phi_1^L Z_t \quad \dots(1-15)$$

مع MSE يساوي :

$$E(Z_{t+L} - \hat{Z}_{t+L/t})^2 = (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots + \phi_1^{2(L-1)}) \sigma^2$$

ان هنالك قيمة لـ  $\phi_1$  قريبة بصورة كافية Sufficiently Close من الواحد بحيث تكون المضامين الملحوظة للتمثيل المستقر تحت فرضية  $H_1$  قريبة بصورة اعتباطية Arbitrarily Close من عملية جذر الوحدة تحت فرضية  $H_0$ . وتوجد اربع حالات في اختبار جذر الوحدة وهي على التوالي<sup>[6]</sup>.

#### الحالة الاولى (1) Case (1) :-

$$H_0 : Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

$$\text{v.s. } H_1 : Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

#### الحالة الثانية (2) Case (2) :-

$$H_0 : Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

$$\text{v.s. } H_1 : Z_t = \alpha_0 + \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

#### الحالة الثالثة (3) Case (3) :-

$$H_0 : Z_t = \alpha_0 + Z_{t-1} + a_t$$

$$\text{v.s. } H_1 : Z_t = \alpha_0 + \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

#### الحالة الرابعة (4) Case (4) :-

$$H_0 : Z_t = \alpha_0 + Z_{t-1} + a_t$$

$$\text{v.s. } H_1 : Z_t = \alpha_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \delta_t + a_t$$

حيث ان :-

$\alpha_0$  : يمثل الحد الثابت Constant

$\phi_1$  : تمثل معلمة نموذج AR(1)

$\delta_t$  : يمثل الانحراف Drift

$a_t$  : يمثل الخطأ العشوائي الذي يتوزع طبيعياً متقارباً بوسط حسابي صفر وتباين

$\sigma_a^2$



وسنتناول الحالتين الأولى والثانية فقط في عملية الاختبار.

1. الحالة الأولى: عندما يكون النموذج من دون الحد الثابت او دون اتجاه زمني في الانحدار وان العملية الفعلية هي السير العشوائي\* وتدعى بـ  
**.Unit Root Case (1)**

ان نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى الخالي من الحد الثابت Constant او من الاتجاه الزمني Time Trend على وفق الصيغة الآتية:-  

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad \dots\dots\dots (1-16)$$
 حيث ان

$$a_t \sim \text{IND}(0, \sigma^2 a)$$

وان تقدير المربعات الصغرى OLS للمعلمة كما يأتي:-

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_t}{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2} \quad \dots\dots\dots (1-17)$$

وفي حالة كون قيمة  $|\phi_1| < 1$  فان

$$\sqrt{n} (\hat{\phi}_1 - \phi_1) \xrightarrow{L} N(0, (1 - \phi_1^2)) \quad (L : \text{Converge In Law})$$

أن الصيغة اعلاه تتحقق ايضاً عندما  $\phi_1 = 1$  بحيث ان قيمة التباين تساوي صفراً أي ان:-

$$\sqrt{n} (\hat{\phi}_1 - 1) \xrightarrow{P} 0$$

فعندما  $\phi_1 = 1$  فان الصيغة رقم (1-17) تضرب بـ n للحصول على

التوزيع التقاربي لـ  $\hat{\phi}_1$ . وللتوصل الى افضل اختبار للفرضية الاحصائية الآتية:

\* انظر المصادر ذات الارقام التالية : [3, 5, 6, 7, 9].

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \phi_1 = 1 \\ \text{v.s. } H_1: \phi_1 < 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1-18)$$

لدينا

$$b - \beta = \left( \sum_{t=1}^n Z_t Z_t' \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n Z_t a_t \right)$$

اي ان :

$$\hat{\phi}_1 - \phi_1 = \left( \sum_{t=1}^n Z_t Z_t' \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n Z_t a_t \right)$$

بما ان المتغير من نوع الاحادي Univariate فان :-

$$\hat{\phi}_1 - \phi_1 = \left( \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n Z_{t-1} a_t \right) \dots\dots\dots (1-19)$$

وعند التعويض لقيمة  $\phi_1=1$  فان الصيغة رقم (1-19) تصبح :-

$$\hat{\phi}_1 - 1 = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1} a_t}{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2}$$

كما ان :-

$$n(\hat{\phi}_1 - 1) = \frac{(1/n) \sum_{t=1}^n Z_{t-1} a_t}{(1/n^2) \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2} \dots\dots\dots (1-20)$$

وحسب فرضية  $Z_t^*$  التي تتبع نموذج السير العشوائي وباستخدام النتيجة

(b) الخاصة بها . فان بسط الصيغة اعلاه يصبح :-

\* للمزيد من التفاصيل حول الفرضية ونتيجتي (b) و (e) انظر المصدر رقم [6] .

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} a_t \xrightarrow{L} (1/2) \sigma^2 \{ [w(1)]^2 - 1 \} \quad \dots\dots\dots (1-21)$$

ومن النتيجة (e) الخاصة بفرضية  $Z_t$  فان مقام الصيغة (1-20) هي كما ياتي:-

$$n^{-2} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 \xrightarrow{L} \int_0^1 [w(r)]^2 dr \quad \dots\dots\dots (1-22)$$

وبافتراض ان  $Z_t$  متتابعة من المتغيرات العشوائية ذات بعد  $(n*1)$ . وتحت

فرضية العدم فان مقدر  $\hat{\phi}_1$  يكون على النحو الاتي:-

$$n(\hat{\phi}_1 - 1) \xrightarrow{L} \frac{(1/2) \{ [w(1)]^2 - 1 \}}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr} \quad \dots\dots\dots (1-23)$$

حيث ان:-

$[w(1)]^2$ : تمثل الحركة البراونية القياسية Standard Brownion Motion وهي عملية تصادفية بالزمن المستمر لكل قيمة  $t$  بحيث  $t \in [0,1]$  وان لها توزيع مربع كاي  $\chi^2$  بدرجة حرية واحدة.

عندما يكون  $[w(1)]^2$  كبيراً فان مقام الصيغة رقم (1-23) سيكون كبيراً ايضاً. النتيجة هي ان التوزيع المحاذي Limiting Distribution لـ  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  يكون له التواء Skewed من الجانب الايسر.

وفي حالة الاستقرار فان تقدير  $\hat{\phi}_1$  يكون له تحيز Biased عند العينات الصغيرة. كما ان غاية التوزيع  $(\hat{\phi}_1 - \phi_1) \sqrt{n}$  تكون متماثلة Symmetric حول الصفر.

اما في حالة وجود القيد  $\phi_1=1$  فان غاية التوزيع  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  تكون متماثلة مع ضعف القيم السالبة بالنسبة الى القيم الموجبة.

وعملياً فإن القيم الحرجة للمتغير العشوائي في الصيغة (1-23) توجد من خلال حساب توزيع العينة-الصغيرة  $[n(\hat{\phi}_1 - 1)]$  لـ  $n$  المعطاة بفرض ان  $\{a_t\}$  لها توزيع طبيعي Gaussian. وهذا ممكن عمله اما بطريقة مونت كارلو Monte Carlo<sup>[6]</sup> كما في القيم الحرجة المسجلة في Fuller (1976) او باستخدام ارقام معينة لبيانات محددة كما في Svans (1981) و Savin. وعندما تكون  $n$  كبيرة فإن القيم هذه توصف ايضاً بالتوزيع التقريبي عندما لا يكون للاخطاء العشوائية توزيع طبيعي Non-Gaussian. وتستخدم احصاءة اخرى لاختبار الفرضية (1-18) التي تعتمد اساساً على مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية OLS وهي:-

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} = \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\left\{ \hat{\sigma}^2 \div \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 \right\}^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (1-24)$$

حيث ان

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^n (Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1})^2 / (n-1)$$

على الرغم من ان الصيغة رقم (1-24) تحسب في الحالات الاعتيادية. ولكن عندما العملية مصنفة بـ  $\phi_1=1$  فان هذه الصيغة ليس لها حدود التوزيع الطبيعي Limiting Gaussian Distribution ولايجاد حدود التوزيع الملائم نلاحظ بانها مكافئة الى الشكل الاتي:-

$$\hat{\tau} = n(\hat{\phi}_1 - 1) \left\{ n^{-2} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 \right\}^{1/2} \div \{\hat{\sigma}^2\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (1-25)$$

او بالتعويض من الصيغة (1-20) فان:

$$\hat{\tau} = \frac{n^{-1} \sum Z_{t-1} a_t}{\left\{ n^{-2} \sum Z_{t-1}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \hat{\sigma}^2 \right\}^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (1-26)$$

ان الاتساق Consistency الى  $\hat{\phi}_1$  يؤدي الى ان  $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$  ومن الصيغتين رقم (1-21) ورقم (1-22) عندما  $n \rightarrow \infty$  فان:

$$\tau \xrightarrow{L} \frac{(1/2)\sigma^2\{[w(1)]^2 - 1\}}{\left\{ \sigma^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr \right\}^{1/2}} = \frac{(1/2)\{[w(1)]^2 - 1\}}{\left\{ \int_0^1 [w(r)]^2 dr \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (1-27)$$

وعليه فان الصيغتين (1-23) ورقم (1-27) هما صيغتان لاختبار Fuller-Dickey للـ Unit Roots ومأخوذة في الاساس من Fuller و Dickey (1979).

وان الجداول الاحصائية الخاصة بتوزيع الصيغتين رقم (1-20) ورقم (1-26) ولحجم عينة (n) معين ومستوى دلالة (α) معين، مسجلة في جداول خاصة لـ Dickey-Fuller وتحت Case(1). وعندما تقترب الجذور الى الواحد فهذا يتطلب عينات كبيرة جداً لكي يكون التوزيع مقارباً الى الطبيعي. ففي حالة  $\phi_1 = 1$  فان القيمة المقدرة تقترب في الاحتمالية Converges In Probability اسرع بكثير الى القيمة الفعلية مما لو كانت القيمة  $|\phi_1| < 1$ .

2. الحالة الثانية:- عند وجود الحد الثابت في النموذج وبدون الاتجاه الزمني في الانحدار، وان العملية الفعلية هي السير العشوائي\* وتدعى بـ **Unit Root Case (2)**.

لدينا العملية الطبيعية Gaussian للانحدار الذاتي AR(1) الآتية:-

$$Z_t = \alpha_0 + \phi_1 Z_{t-1} + a_t \dots\dots\dots (1-28)$$

حيث ان:-

$$a_t \sim \text{IND}(0, \sigma_a^2)$$

ان تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية OLS لمعاملات النموذج تكون

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum Z_{t-1} \\ \sum Z_{t-1} & \sum Z_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Z_t \\ \sum Z_{t-1} Z_t \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1-29)$$

\* انظر المصادر ذات الارقام الآتية: [3, 5, 6, 9].

وتحت الفرضية القائلة ان:-

$$H_0 : \alpha_0 = 0 , \phi_1 = 1 \quad \dots\dots\dots (1-30)$$

فان تقديرات OLS لمعاملات النموذج تكون

$$b - \beta = \left[ \sum_{t=1}^n Z_t Z_t' \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^n Z_t a_t \right] \quad \dots\dots\dots (1-31)$$

أي ان:-

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\phi}_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum Z_{t-1} \\ \sum Z_{t-1} & \sum Z_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum a_t \\ \sum Z_{t-1} a_t \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-32)$$

ومن فرضية  $Z_t^*$  التي تتبع نموذج السير العشوائي وباستخدام النتيجة (d) من

الفرضية فان:-

$$n^{-3/2} \sum Z_{t-1} \xrightarrow{L} \sigma \int_0^1 w(r) dr \quad \dots\dots\dots (1-33)$$

وبعبارة اخرى فان

$$\sum Z_{t-1} = O_p(n^{3/2})$$

وبالتماثل من نتائج الصيغتين رقم (1-21) ورقم (1-22) يتحقق ما يأتي:-

$$\sum Z_{t-1} a_t = O_p(n)$$

$$\sum Z_{t-1}^2 = O_p(n^2)$$

ومن نتيجة (a) لفرضية  $Z_t$  التي تتبع نموذج السير العشوائي فان

$$\sum a_t = O_p\left(n^{1/2}\right)$$

وعليه فان مقدرات  $\hat{\phi}_1, \hat{\alpha}_0$  لهما معدلات مختلفة للتقارب Different

.Rates Of Convergence

وبالضرب المسبق Premultiplying للصيغة رقم (1-31) بالمصفوفة

$Z_n$  حيث ان:

$$Z_n = \begin{bmatrix} n^{1/2} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-34)$$

\* للمزيد من التفاصيل حول الفرضية ونتيجتي (d) و (a) انظر المصدر رقم [6].

ينتج بان:-

$$\begin{bmatrix} n^{1/2} \hat{\alpha} \\ n(\hat{\phi} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n^{-3/2} \sum Z_{t-1} \\ n^{-3/2} \sum Z_{t-1} & n^{-2} \sum Z_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n^{1/2} \sum a_t \\ n^{-1} \sum Z_{t-1} a_t \end{bmatrix} \dots (1-35)$$

وباستخدام الصيغة رقم (1-22) والصيغة رقم (1-33). فان التوزيع

التقاربي Asymptotic Distribution للصيغة رقم (1-35) سيكون

$$\begin{bmatrix} n^{1/2} \hat{\alpha}_0 \\ n(\hat{\phi}_1 - 1) \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int w(r) dr \\ \int w(r) dr & \int (w(r))^2 dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(1) \\ (1/2) \{ [w(1)]^2 - 1 \} \end{bmatrix}$$

وعليه فان

$$n(\hat{\phi}_1 - 1) \xrightarrow{L} \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int w(r) dr}{\int [w(r)]^2 dr - \left[ \int w(r) dr \right]^2} \dots (1-36)$$

وهذه الصيغة تختلف عن الصيغة رقم (1-23) لانها تتضمن الحد الثابت

$\alpha_0$  في التوزيع حيث ان الصيغة رقم (1-36) لها توزيع تقاربي.

وعند حساب الصيغة اعلاه تقارن مع جداول خاصة لـ Dickey و

Fuller وبقيم حرجة تحت Case(2) للتوصل الى قرار معين للفرضية.

ويمكن ملاحظة كون هذا التوزيع يميل اكبر الى الالتواء مما لو كانت

الحالة الاولى Case(1) هي المدروسة.

لقد اقترح الباحثان Fuller و Dickey اختباراً بديلاً تدرس الحالة الثانية

Case(2) مبنية على اساس مقدرات OLS للفرضية العدم  $\phi_1 = 1$ . وهي [6]:-

$$\tau = \frac{\hat{\phi} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} \dots (1-37)$$

حيث ان:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2 = \hat{\sigma}^2 \begin{bmatrix} n & \sum Z_{t-1} \\ \sum Z_{t-1} & \sum Z_{t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dots (1-38)$$

وان:

$$\hat{\sigma}^2 = (n-2)^{-1} \sum (Z_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\phi}_1 Z_{t-1})^2$$

بضرب الطرفين للصيغة رقم (1-38) بـ  $n^2$  وباستخدام مصفوفة  $Z_n$  المعرفة بالصيغة رقم (1-34) فان

$$n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}^2 \xrightarrow{P} \hat{\sigma}^2 \begin{bmatrix} 0 & \sigma^{-1} \\ \int w(r) dr & \int [w(r)]^2 dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1-39)$$

وان

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

وعليه فان التوزيع التقاربي لاختبار  $\tau$  المعرف بالصيغة رقم (1-37) يساوي :

$$\tau = \frac{n(\hat{\phi}_1 - 1)}{\{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}^2\}^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{P} n(\hat{\phi}_1 - 1) \left\{ \int [w(r)]^2 dr - \left[ \int w(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{P} \frac{\left( \frac{1}{2} \right) \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int w(r) dr}{\left\{ \int [w(r)]^2 dr - \left[ \int w(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \dots (1-40)$$

وان نسب العينة للقيمة الجدولية الخاصة بالصيغة (1-40) مسجلة في جداول خاصة لـ Dickey-Fuller عند حجم (n) معينة ومستوى دلالة ( $\alpha$ ) معين وتحت Case(2). للمقارنة وللتوصل الى قرار معين في رفض فرضية العدم او عدمه.

### 1-2-1 : اختبار مقترح لجذر الوحدة

في نموذج الانحدار الخطي البسيط Simple Linear Regression Model  
الآتي:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad , \quad t=1,2,\dots,n$$

حيث ان

$Z_t$  : المتغير المعتمد Dependent Variable

$Z_{t-1}$  : المتغير المستقل Independent Variable

$\phi_1$  : معلمة الانحدار



$a_t \sim N(0, \sigma^2_a)$  : الخطأ العشوائي حيث ان

وتوافر فرضيات التحليل الآتية<sup>[11]</sup>:-

$$E(a_t) = 0, \quad E(a_t^2) = \sigma_a^2, \quad E(a_t a_h) = 0 \quad \text{for } t \neq h, \quad E(Z_{t-1} a_t) = 0$$

وبموجب الفرضية الآتية:-

$$H_0 : \phi_1 = 1$$

$$\text{v.s. } H_1 : \phi_1 < 1$$

وان مقدر OLS للمعلمة  $\phi_1$  :-

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_t}{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2}$$

وهو أفضل مقدر خطي غير متحيز ومتسق Consistent and Best

Linear Unbiased Estimator

لذلك يتم اقتراح استخدام احصاءة  $t$  للانحدار الآتي في اختبار الفرضية:

$$t = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{SE\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\left\{ \hat{\sigma}_a^2 / \sum Z_{t-1}^2 \right\}^{1/2}} \quad \dots\dots\dots(1-4)$$

ومقارنة قيمة  $t$  المستخرجة مع  $t$  الجدولية للانحدار بمستوى معنوية  $(\alpha)$

معين ودرجة حرية  $(n-1)$  للتوصل الى قرار معين بعد المقارنة.

وللنموذج الآتي:-

$$Z_t = \alpha_0 + \phi_1 Z_{t-1} + a_t, \quad t=1,2,\dots,n$$

حيث ان  $\alpha_0$  : يمثل الحد الثابت وتقديره بطريقة OLS هو:

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{Z}_t - \hat{\phi}_1 \bar{Z}_{t-1}$$

وان:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z}_t)(z_{t-1} - \bar{z}_{t-1})}{\sum_{t=1}^n (z_{t-1} - \bar{z}_{t-1})^2}$$

وتوافر فرضيات التحليل لنموذج الانحدار الخطي البسيط. وبموجب

فرضية العدم المذكورة انفاً.

فيتم اقتراح تطبيق احصاءة  $t$  الآتية للانحدار في اختبار الفرضية.

$$t = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\left\{ \hat{\sigma}_a^2 / S_{Z_{t-1}} \right\}^{1/2}} \quad \dots \dots (1 - 42)$$

حيث ان:

$$S_{Z_{t-1}} = \left[ \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 - \left( \sum_{t=1}^n Z_{t-1} \right)^2 / n \right]$$

وتقارن قيمة  $t$  المحتسبة مع نظيرتها الجدولية بمستوى دلالة  $\alpha$  معين ودرجة حرية  $(n-2)$  للتوصل الى قرار معين. علماً ان الاختبارين المقترحين يميلان الى جهة اليسار، ويعطيان فرصة للاختبار بغير العودة إلى جداول Dickey-Fuller المحدودة الاستخدام والانتشار.

## 2 - تجارب المحاكاة لاستقرارية نموذج الانحدار الذاتي الطبيعي

### Simulation Experiments for **Stationary** Gaussian Autoregressive Model

يمكن استخدام المحاكاة Simulation للتوصل الى نتائج معينة وذلك بتوليد أعداد عشوائية  $(u_1, u_2)$  تتبع التوزيع المنتظم المستمر Uniform Distribution  $U(0,1)$  وتكون هذه مستقلة فيما بينها ، على ان تجتاز الاختبارات الخاصة بها لمعرفة مدى الملاءمة للتوزيع المنتظم المستمر أولاً والاستقلالية ثانياً. يلي ذلك توليد متغيرين عشوائيين يتبعان التوزيع الطبيعي Normal Distribution لتوليد السلسلة الزمنية الخاصة بالاختفاء العشوائية  $(a_t)$  التي تتبع التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal Distribution بوسط حسابي (صفر) وتباين (واحد) باستخدام صيغة Box-Muller . وقد كتبت جميع البرامج الخاصة بالجانب التجريبي وفق لغة Visual Basic 6.0.

## التجربة الأولى :

اختبارات استقرارية الوسط الحسابي (اتجاه عام خطي) وبصيغة:  $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$ .  
تم تصميم تجربة المحاكاة باستخدام حجوم عينات مختلفة (25، 50، 100، 200) مع تكرار التجربة (1000) مرة لاختبار استقرارية الوسط الحسابي وتوليد سلسلة ذات اتجاه زمني  $\mu_t$ .

وبقيم  $\alpha_1$  الافتراضية الآتية: 0.05، 0.10، 0.15 وقيمة  $\alpha_0$  الثابتة والمساوية إلى ( $\alpha_0 = 0.1$ ) عند كل قيمة لـ  $\alpha_1$ . وان الزمن  $t = 1, 2, \dots, n$  يتأثر بحجم العينة المختارة للتجربة. وتوليد السلسلة الزمنية الخاصة بالأخطاء العشوائية ( $a_t$ ) التي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين  $\sigma^2$ ، فقد تم توليد الانحراف المعياري  $\sigma$  على وفق الصيغة الآتية:-

$$\sigma = \overline{\mu}_t * c.v$$

حيث ان c.v: يمثل معامل الاختلاف Coefficient of Variation.

وقد تم اخذ قيم افتراضية لمعامل c.v الآتية\*:-

$$c.v = 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 0.99, 1.00, 1.30, 1.50, 2, 2.50$$

وان  $\overline{\mu}_t$  يمثل الوسط الحسابي للقيمة  $\mu_t$  وذلك بأخذ مجموع قيم  $\mu_t$  المأخوذة من الصيغة الاولى لهذه المجموعة من المحاكاة [ الموضحة وفق الصيغة رقم (1-2) ] مقسوماً على حجم العينة عند  $\alpha_0$  الثابتة ولكل معلمة  $\alpha_1$  افتراضية.

إلى ذلك فقد تم توليد السلسلة الزمنية  $Z_t$  غير المستقرة في الاتجاه الزمني لنموذج الانحدار على وفق الصيغة رقم (1-3) مع الحد الثابت وبقيم  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  المذكورة انفاً وتم تقدير المعلمتين  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  بأسلوب المربعات الصغرى OLS وتقدير التنبؤ للسلسلة الزمنية  $Z_t$ .

كما تم احتساب إحصاءة t للانحدار والموضحة في المبحث رقم (1-1) من الجانب النظري لاختبار الفرضية في (1-5) ( عند  $\alpha_{10} = 0$  ) في جدول رقم (1)

\* بالتشاور مع المختصين في وحدة بحوث العمليات/هيئة الكهرباء/بغداد.

في الملحق والنتائج\*\* موضحة في الجدول رقم (1) عند مستوى دلالتى  $\alpha=0.05$  و  $\alpha=0.01$  (إذ ان قيمهما الجدولية موجودة في الجدول رقم (3) في الملحق) ومن ملاحظة الجدول نصل إلى انه:

1- عند اخذ قيم مختلفة لمعامل الاختلاف التي يكون  $c.v \leq 0.55$  في توليد  $\sigma$  عند مختلف المعلمات الافتراضية  $\alpha_1$  وحجوم العينات فان النتائج تشير إلى إن البيانات المتولدة يكون لها اتجاه متأثر بالزمن ويتضح ان عدد التكرارات في عدم رفض الفرضية  $H_1$  (بان الاتجاه موجود في البيانات المتولدة للسلسلة الزمنية) تصل إلى (1000) عند  $n=25$  كما يصل هذا العدد في العينات المتوسطة الحجم عند  $c.v=0.65, 0.75, 0.85$  وكذلك يلاحظ عند ازدياد قيمة  $c.v$  فان هذا العدد يكون عند العينات الكبيرة الحجم.

2- تلاحظ الزيادة في عدم معنوية الاختبار عند زيادة معامل الاختلاف. فعند قيم  $c.v=1.30, 1.50, 2.00, 2.50$  لمختلف  $\alpha_1$  الافتراضية ولاسيما عند العينات الصغيرة، التي يتبين فيها ان البيانات لم يظهر لها اتجاه زمني وإنها تبدو مستقرة في المتوسط. في حين تزداد معنوية الاختبار بشكل متباين عند ازدياد حجم العينة حتى تصل أعلى عدد عند  $n=200$  والمساوي إلى (1000).

3- ان التغيير في قيمة الحد الثابت  $\alpha_0$  لا يؤثر في نتائج التجربة ولذلك فقد تم تثبيت هذه القيمة عند كل معلمة  $\alpha_1$  افتراضية.

---

\*\* ان نتائج الاختبار الخاص باستقرارية الوسط الحسابي (اتجاه عام خطي) مبين في جدول رقم (3) في الملحق لبعض من قيم  $C.V$  المختلفة.

الجدول ( 1 ): يبين عدد التكرارات في نجاح اختبار استقرارية الوسط الحسابي ( اتجاه عام خطي ) عند (  $\alpha_0 = 0.1$  ) لحجوم عينات مختلفة ومستوى دلالة  $\alpha$  معين وبتكرار ( 1000 ) مرة

n	$\alpha$	0.05			0.01		
	$\alpha_1$ c.v	0.05	0.10	0.15	0.05	0.10	0.15
25	0.95	706	769	799	417	514	550
	0.99	686	744	751	424	496	498
	1.00	654	725	764	395	471	497
	1.30	445	508	513	211	246	278
	1.50	344	409	417	135	197	186
	2.00	218	275	236	66	80	78
	2.50	152	193	177	48	58	65
50	0.95	971	979	985	895	916	917
	0.99	976	979	975	868	901	898
	1.00	956	968	977	853	878	895
	1.30	810	838	846	588	619	664
	1.50	694	736	771	462	467	513
	2.00	445	463	510	236	226	243
	2.50	312	334	359	140	133	134
100	0.95	1000	1000	1000	998	1000	998
	0.99	1000	1000	1000	999	999	999
	1.00	1000	1000	1000	996	997	998
	1.30	991	988	989	949	945	953
	1.50	964	947	976	865	863	890
	2.00	787	802	807	570	565	623
	2.50	569	592	586	348	367	332
200	0.95	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	0.99	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	1.00	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	1.30	1000	1000	1000	1000	999	1000
	1.50	999	1000	1000	995	999	998
	2.00	979	979	982	919	927	940
	2.50	889	902	902	713	758	734

## التجربة الثانية :

المقارنة بين إحصاءات اختبار جذر الوحدة ( عدد التكرارات ) للنموذج الطبيعي AR(1) غير المستقر عند عدم توافر الحد الثابت وتسمى باختبارات جذر الوحدة- حالة (1) [Unit Root Case (1)] .

لغرض المقارنة بين إحصاءات اختبار جذر الوحدة ( عدد التكرارات ) عند غياب الحد الثابت لنموذج الانحدار الذاتي الطبيعي غير المستقر ومن الرتبة الأولى AR(1)، تم تصميم تجربة محاكاة باستخدام حجوم عينات مختلفة (25، 50، 100، 200) مع تكرار التجربة (1000) مرة. وبهدف توليد سلسلة زمنية غير مستقرة التي تتبع النموذج الطبيعي من الرتبة الأولى AR(1) فقد تم اخذ الأخطاء العشوائية المتولدة ( $a_1$ ) على وفق صيغة Box-Muller وبقيم المعلمات الافتراضية الآتية :-  $\phi_1 = 0.80, 0.90, 0.95, 0.99, 1.00, 1.02, 1.05$  والتي تقع في او قريبة من المنطقة غير المستقرة للنموذج الطبيعي AR(1) وبذلك تم توليد بيانات السلسلة الزمنية  $Z_t$  غير المستقرة للنموذج المدروس وتقدير معلمة النموذج  $\phi_1$  باستخدام أسلوب OLS. وتم تطبيق الإحصاءات الخاصة بهذه التجربة (جذر الوحدة -حالة 1) والموضحة في المبحث رقم (1-2) من الجانب النظري لاختبار الفرضية المثبتة في (1-18) ووفق الصيغتين رقم (1-23) ورقم (1-27) وكذلك الصيغة رقم (1-41) المقترحة واحتسابها في الجدول رقم (4) في الملحق. والنتائج مبينة في الجدول رقم (2) الخاص باختبار جذر الوحدة عند غياب الحد الثابت وبمستوى دلالتى  $\alpha=0.05$  و  $\alpha=0.01$  (علماً ان القيم الجدولية موجودة في جدول رقم (3) في الملحق والمأخوذة من جداول Fuller تحت case(1) الخاصة بالإحصائيتين\*  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  و  $\tau$  وقيم t الجدولية للانحدار). ومن الجدول يتبين:

\* تمت كتابة الرمز  $Z_p$  بدلاً من الرمز  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  والرمز  $Z_t$  بدلاً من  $\tau$  في الرسومات فقط وذلك بسبب الرموز المتاحة في برامج رسم الاشكال في اختبار جذر الوحدة لـ case(1) و case(2) كذلك .

الجدول (2): يبين المقارنة بين احصاءات اختبار جذر الوحدة (عدد التكرارات) عند عدم وجود الحد الثابت ( الحالة 1 ) للنموذج AR(1) غير المستقر لحجوم عينات مختلفة ومستوى دلالة معين و لـ ( 1000 ) تكرار

α	n	25			50			100			200		
		φ <sub>1</sub>	n(φ̂ <sub>1</sub> -1)	τ	t	n(φ̂ <sub>1</sub> -1)	τ	t	n(φ̂ <sub>1</sub> -1)	τ	t	n(φ̂ <sub>1</sub> -1)	τ
0.05	0.80	669	683	520	235	258	211	192	218	117	114	135	112
	0.90	868	869	780	676	678	505	369	372	309	131	146	116
	0.95	927	928	870	846	848	751	672	675	506	226	230	189
	0.99	933	937	885	930	931	874	926	929	866	890	896	784
	1.00	947	956	890	941	949	887	932	945	880	929	940	872
	1.02	935	940	870	901	908	739	805	812	512	534	571	218
	1.05	741	748	691	539	582	469	211	226	203	190	207	173
0.01	0.80	923	926	894	652	663	515	320	371	213	196	193	136
	0.90	971	973	961	922	927	867	687	691	327	288	284	229
	0.95	983	986	971	966	968	940	912	918	681	690	693	509
	0.99	984	987	979	980	985	968	967	980	952	965	973	830
	1.00	988	990	981	986	988	978	972	982	963	969	976	871
	1.02	970	978	968	962	967	889	891	898	604	699	717	487
	1.05	943	959	830	781	784	652	402	413	133	311	326	208

1- زيادة العدد في نجاح اختبار البيانات المتولدة ( بان لها جذراً مساوياً إلى الواحد) بعد تطبيق الاختبارات الثلاثة  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  و  $\tau$  و  $t$  للانحدار المقترح عند زيادة قيمة المعلمة الافتراضية (مع ملاحظة ان اقل عدد في نجاح الاختبار عند  $\phi_1=0.80$ ) ثم تبدأ بالانخفاض عندما تكون قيمة  $\phi_1 > 1$  وهذا يشير إلى ان البيانات المتولدة غير مستقرة وإنها لها صفة السير العشوائي Random Walk.

2- إن عدم فشل الاختبار لـ Dickey-Fuller والذي يقابل الاحصاء  $\tau$  تميل إلى الازدياد (بدرجة اقل) مقارنة باحصاء  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  عند جميع المعلمات الافتراضية

3- عند تطبيق الاحصاء المقترحة  $t$  للانحدار فان عدم معنوية المعلمة المقدرة عند المعلمات الافتراضية المختلفة تقل عند ازدياد حجم العينة ويتضح تأثر هذه الاحصاءة بشدة بحجم العينة. وهذا يعني عند ازدياد  $n$  فان نسبة ظهور معنوية

المعلمة المقدره من الواحد تزداد وعليه يجب اخذ الفرق الأول للسلسلة الزمنية المتولدة.

4- إن افضل أداء في الاختبار بصورة عامة هو عند الاحصاء  $\tau$  في جميع قيم  $\phi_1$  الافتراضية ولمختلف العينات. مع ملاحظة إن احصاء  $t$  للانحدار لها اكبر رفض للاختبار. علماً إن أداء الاحصاءات الثلاث متشابهة بصورة عامة.

5- في العينات الكبيرة ( $n=100, 200$ ) فإن اختبار  $t$  للانحدار يكون مرفوضاً على الأغلب عند بعض قيم المعلمات الافتراضية التي تكون قيمها اقل من الواحد واكبر منه. بينما الاختباران الأول والثاني يرفضان في  $\phi_1=0.80, 1.02$  عند  $n=100$  و  $0.90, 1.02, \phi_1=0.80$  عند  $n=200$ . ويعني هذا عند زيادة حجم العينة تزداد عدد المعلمات التي فيها رفض الاختبار.

6- يمكن القول أن أعلى عدد في نجاح الاختبار لاحصاءات الاختبار الثلاث عند العينات الصغيرة ويتناقص هذا العدد بزيادة حجم العينة ويصل اقلها عند  $n=100, 200$ . وكذلك ان اكبر تكرار في حالات عدم رفض فرضية العدم هي عندما  $\phi_1=1$ .

#### التجربة الثالثة :

المقارنة بين إحصاءات اختبار جذر الوحدة (عدد التكرارات) للنموذج الطبيعي AR(1) غير المستقر عند وجود الحد الثابت Constant وتسمى باختبارات جذر الوحدة - حالة (2) [ Unit Root case (2) ] .

تم اخذ السلسلة الزمنية المتولدة الخاصة بالأخطاء العشوائية ( $a_1$ ) من التجربة الأولى للمجموعة الأولى وبنفس حجوم العينات المختلفة وقيم المعلمات الافتراضية المختلفة مع تكرار (1000) مرة. مع اخذ قيمة الحد الثابت  $\alpha_0=0.1$  في جميع قيم  $\phi_1$  الافتراضية.

فتم توليد بيانات السلسلة الزمنية  $Z_t$  غير المستقرة لنموذج الانحدار الذاتي الطبيعي من الرتبة الأولى وتقدير معلمتي النموذج  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  بأسلوب OLS. وتم تطبيق الاحصاءات الخاصة بهذه التجربة (جذر الوحدة - حالة 2) والموضحة في المبحث رقم (2-1) من الجانب النظري لاختبار الفرضية المثبتة في (1-18)



وعلى وفق الصيغتان رقم (1-36) ورقم (1-40) والصيغة رقم (1-42) المقترحة واحتسابها في الجدول رقم (4) في الملحق. أما الجدول رقم (3) فيبين نتائج الاختبار الخاصة بجذر الوحدة عند وجود الحد الثابت ولمستوى دلالاتي  $\alpha=0.05$  و  $\alpha=0.01$  (علماً ان القيم الجدولية موضحة في جدول رقم (3) في الملحق والمأخوذة من جداول Fuller تحت (2) case الخاصة باحصائتي  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  و  $\tau$  وقيم t الجدولية للانحدار). ويتبين من ملاحظة الجدول ما يأتي:

1- بعد تطبيق احصاءات الاختبار الثلاثة  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$ ،  $\tau$ ، t للانحدار المقترح يلاحظ الزيادة في عدد مرات نجاح اختبار البيانات المتولدة بان لها جذراً مساوياً إلى الواحد عند زيادة قيمة المعلمة الافتراضية ثم تبدأ بالانخفاض عندما تكون قيمة المعلمة اكبر من الواحد. وهذا يتطلب اخذ الفرق الأول للسلسلة المتولدة وصولاً إلى الاستقرارية.

### الجدول (3)

يبين المقارنة بين إحصاءات اختبار جذر الوحدة ( عدد التكرارات ) عند ثبوت (  $\alpha_0 = 0.1$  ) (الحالة 2) لنموذج AR(1) غير المستقر لحجوم عينات مختلفة ومستوى دلالة معين و لـ

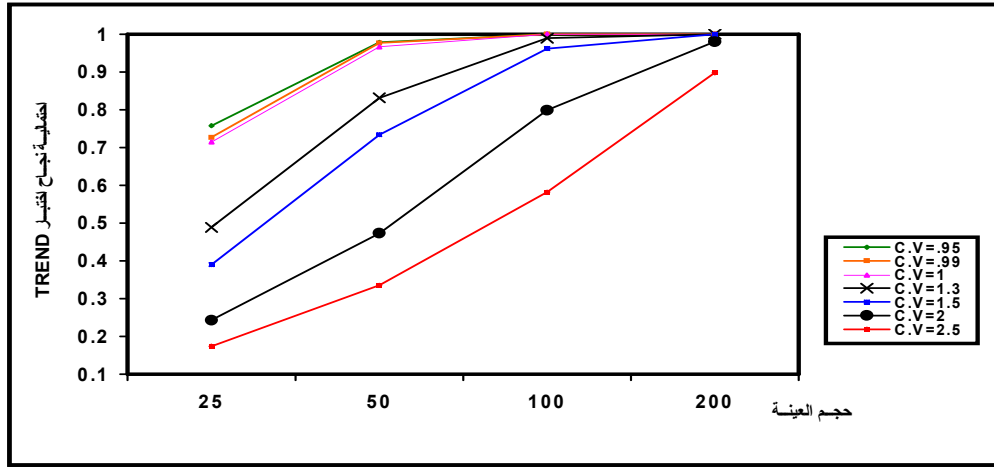
تكرار (1000)

$\alpha$	n	25			50			100			200		
		$\phi_1$	$n(\hat{\phi}_{1-1})$	$\tau$	t	$n(\hat{\phi}_{1-1})$	$\tau$	t	$n(\hat{\phi}_{1-1})$	$\tau$	t	$n(\hat{\phi}_{1-1})$	$\tau$
0.05	0.80	814	887	318	508	694	294	254	236	221	193	179	101
	0.90	893	945	528	818	889	377	548	692	248	257	217	112
	0.95	927	960	611	887	941	481	827	898	471	525	688	245
	0.99	956	978	695	951	973	641	946	970	628	935	964	578
	1.00	969	983	794	964	981	729	950	976	712	948	970	706
	1.02	950	973	702	947	962	704	833	858	660	588	596	465
	1.05	931	951	693	883	893	697	289	297	114	216	223	105
0.01	0.80	940	968	753	850	908	437	397	517	346	219	207	135
	0.90	978	985	854	947	977	721	853	938	370	342	529	186
	0.95	979	992	885	977	987	829	950	982	720	841	920	333
	0.99	990	995	929	989	993	913	988	990	898	978	983	872
	1.00	992	998	955	991	997	932	990	994	905	985	989	899
	1.02	983	987	939	978	982	923	962	971	865	738	767	681
	1.05	961	979	813	955	967	807	413	478	243	336	372	126

- 2- أن أعلى عدد في حالات عدم رفض الفرضية  $H_0$  في الاحصاءات الثلاث عندما تكون قيمة  $\phi_1 = 1$  وهذا يعني إن البيانات المتولدة لها صفة السير العشوائي Random Walk وإنها غير مستقرة.
- 3- تزداد معنوية فشل الاختبار عند ازدياد حجم العينة وخاصة عند  $(n=100, 200)$ . وهذا يعني تأثير احصاءات الاختبار هذه في حجم العينة العشوائية.
- 4- إن أعلى عدد في حالات نجاح الاختبار عند الاحصاءة  $\tau$  وان أوطأ عدد عند الاحصاءة  $t$  للانحدار. كذلك إن أعلى حالات رفض في هذه الاختبارات عند  $\phi=0.80, 0.90, 1.05$  وبشكل خاص في العينات الكبيرة.
- 5- التأثير الشديد للاحصاءة  $t$  للانحدار في اختبار معنوية المعلمة المقدره بحجم العينة وفي قيمة المعلمة نفسها مقارنة بالإحصائتين الأولى والثانية.

### الاستنتاجات

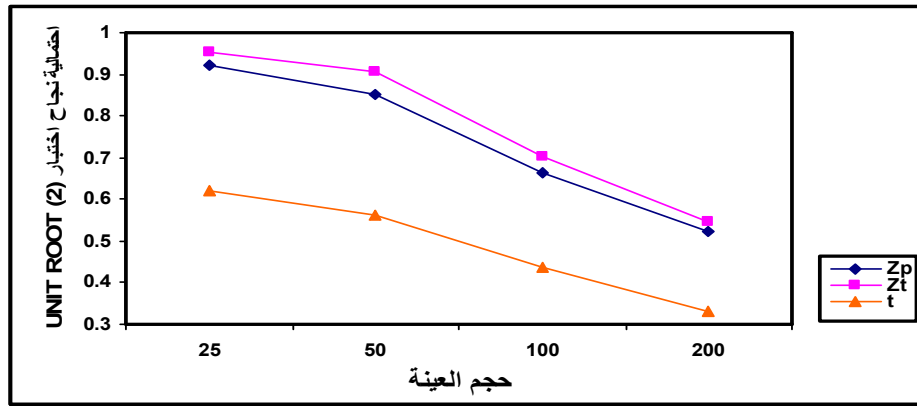
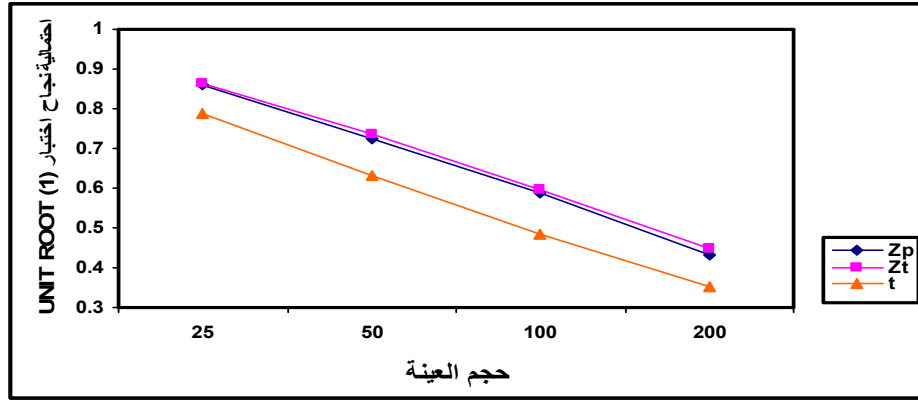
- يمكن ان نركز اهم الاستنتاجات التي تمخض عنها البحث في جوانبه النظرية والتجريبية والتطبيقية على النحو الآتي :-
- 1 - زيادة قيمة معامل الاختلاف بكلام آخر زيادة الضوضاء (التشتت) Noise تؤثر في عملية رفض الفرضية البديلة  $H_1$  او قبولها لأن الاتجاه الزمني موجود في البيانات وهي غير مستقرة في المتوسط.
- 2 - يلاحظ في اختبار استقرارية الوسط الحسابي في الاتجاه العام الخطي وبصيغة  $t$  انه عند زيادة قيمة  $c.v$  يصاحبها زيادة في رفض الفرضية  $H_1$ . فعندما تكون قيمة  $c.v = 2.50$  فان لها أوطأ سلوك في نجاح الاختبار على العكس فانه عند  $c.v = 0.95$  يكون لها أعلى سلوك في الاختبار والشكل ( 1 ) يوضح ذلك .



الشكل ( 1 )

يظهر احتمالية نجاح اختبار استقرارية الوسط الحسابي ( اتجاه عام خطي ) عند قيم مختلفة لمعاملات الاختلاف وحجوم عينات ومستوى دلالة 0.05 وبتكرار ( 1000 ) مرة

3 - التوافق في سلوك إحصاءات الاختبار الثلاثة  $n(\hat{\phi}_1 - 1)$  و  $\tau$  و  $t$  للانحدار، وان هذا السلوك بصورة عامة (عند غياب قيمة الثابت في السلسلة المتولدة او وجودها) متشابه. والشكل (2) يوضح أن سلوك الاختبارات الثلاثة يكون أعلى في حالة وجود قيمة الثابت  $\alpha_0$  ، كما أن افضل أداء عند إحصاءة اختبار  $\tau$  بينما تكون احصاءة اختبار  $t$  للانحدار هي الاوطأ.



شكل رقم ( 2 )

يظهر احتمالية نجاح اختبار جذر الوحدة للنموذج  $AR(1)$  غير المستقر  
لحجوم عينات مختلفة ومستوى دلالة 0.05 وبتكرار 1 000 مرة

التوصيات

- 1- العناية بالاختبارات الخاصة بعدم الاستقرار والاسيما نماذج  $ARIMA(p,d,q)$  غير الطبيعية لأهميتها وتمثيلها في اغلب الظواهر سواء الاقتصادية، الجغرافية والهندسية.
- 2- العناية بالاختبارات الخاصة بالتكامل الكسري Fractional Integration في نماذج  $ARIMA(p,d,q)$  للفروقات الكسرية.

### المصادر

- 1- الراوي، خاشع محمود - 1987 - ( المدخل الى تحليل الانحدار ) - مديرية دار الكتب للطباعة والنشر - جامعة بغداد.
- 2 - Box, George E. P. and Jenkins, Gwilym M., 1976 (Time Series Analysis Forecasting and Control ) , Holden-Day.
- 3 - Dickey, David A. and Fuller, Wayne A., 1979. (Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root) - JASA, Vol. 74, No. 365, PP. 427-431.
- 4 - Dolado, Juan J., Gonzalo, Jesus and Mayoral, Laura, 2001. (A Fractional Dickey-Fuller Test ) - This paper is part of Ph.D. of Laura Mayoral,  
<http://www.econpapers.edu/seminars/dolado.pdf>. PP.1-49.
- 5 - Fuller, Wayne A., 1976. ( Introduction to Statistical Time Series)-John Willy & Sons, Inc.
- 6 - Hamilton, James D., 1994. (Time Series Analysis), Princeton University Press.
- 7 - Hansen , Bruce E., 2002. ( Econometrics )  
<http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/notes/contents.pdf>. PP.113-122.
- 8 - Oya, Kosuke and Toda, Hiro Y., 1998. ( Dickey-Fuller, Lagrange Multiplier and Combined Tests for a Unit Root in Autoregressive Time Series), Journal of Time Series Analysis, Vol. 19, No. 3, PP. 325-347.
- 9 - Philips, Peter C. B. and Perron, Pierre - 1988 - ( Testing for a Unit Root in Time Series Regression ) - Biometrika, Vol. 75, No. 2, PP.(335-346).
- 10 - Said, Said E. and Dickey, David A., 1984.( Testing for Unit Roots in Autoregressive - Moving Average Models of Unknown Order ) - Biometrika, Vol. 71, No. 3, PP.599-607.
- 11 - Wei, William W. S., 1990. ( Time Series Analysis ). Addison Wesley publishing Company.

## الجدول رقم ( 1 )

يبين معدل القيم المحتسبة لإحصاء اختبار استقرارية الوسط الحسابي ( اتجاه عام خطي ) عند  $(\alpha_0=0.1)$  و لحجم عينات مختلفة من 1000 تكرار

n	$\alpha_1$ c.v	0.05	0.10	0.15
		25	0.95	2.716
0.99	2.651		2.802	2.870
1.00	2.566		2.787	2.852
1.30	1.977		2.170	2.218
1.50	1.714		1.896	1.903
2.00	1.391		1.514	1.410
2.50	1.199		1.279	1.251
50	0.95	3.981	4.186	4.195
	0.99	3.876	4.068	4.124
	1.00	3.851	4.028	4.044
	1.30	2.980	3.082	3.120
	1.50	2.573	2.630	2.740
	2.00	1.933	1.988	2.036
	2.50	1.561	1.652	1.683
100	0.95	5.896	6.004	6.093
	0.99	5.620	5.742	5.771
	1.00	5.635	5.686	5.692
	1.30	4.289	4.371	4.401
	1.50	3.726	3.792	3.838
	2.00	2.798	2.829	2.928
	2.50	2.220	2.251	2.253
200	0.95	8.498	8.543	8.617
	0.99	8.122	8.192	8.189
	1.00	8.000	8.083	8.139
	1.30	6.151	6.262	6.259
	1.50	5.319	5.440	5.500
	2.00	4.021	4.028	4.081
	2.50	3.182	3.285	3.235

الجدول ( 2 )

يبين عدد التكرارات في نجاح اختبار استقرارية الوسط الحسابي (اتجاه عام خطي) عند  $(\alpha_0 = 0.1)$  لبعض من قيم c.v المختلفة لحجوم عينات ومستوى دلالة  $\alpha$  معين وبتكرار ( 1000 ) مرة

	0.05			0.01			القيمة المحتسبة		
	0.05	0.10	0.15	0.05	0.10	0.15	0.05	0.10	0.15
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	17.118	18.447	18.677
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10.301	11.007	11.330
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	7.382	7.900	8.106
5	1000	1000	1000	993	1000	1000	5.721	6.144	6.288
5	990	997	999	944	966	980	4.666	4.942	5.196
5	960	973	986	833	877	916	3.977	4.238	4.411
5	895	933	940	713	768	788	3.440	3.702	3.749
5	786	839	853	555	630	645	3.036	3.236	3.267
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	25.614	26.654	26.973
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	15.326	15.985	16.106
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10.877	11.382	11.467
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	8.518	8.940	8.903
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	6.959	7.257	7.405
5	1000	1000	1000	1000	998	1000	5.934	6.194	6.241
5	998	1000	1000	982	998	997	5.047	5.363	5.419
5	990	994	997	964	966	973	4.545	4.689	4.744
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	37.268	38.047	38.210
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	22.495	22.826	23.034
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	16.021	16.249	16.468
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	12.399	12.669	12.866
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10.201	10.410	10.396
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	8.576	8.812	8.836
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	7.398	7.630	7.662
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	6.594	6.752	6.740
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	53.705	54.137	54.319
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	32.072	32.377	32.574
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	22.989	23.179	23.356
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	17.842	18.063	18.092
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	14.603	14.717	14.817
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	12.313	12.455	12.552
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	10.782	10.771	10.896
5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	9.467	9.567	9.562

الجدول (3): يبين القيم الجدولية لإحصاءات الاختبار الخاصة  
الاستقرارية عند مستوى دلالتى 0.05 و 0.01

الحالة	n	25	50	100	200
Test					
Trend	t	2.069*	2.0126	1.9873	1.960
		2.807**	2.6864	2.6328	2.576
Unit Root Case (1)	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	-7.3	-7.7	-7.9	-7.97
		-11.9	-12.9	-13.3	-13.5
	$\tau$	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95
		-2.66	-2.62	-2.60	-2.59
	t	1.711	1.678	1.6625	1.645
		2.492	2.408	2.3692	2.326
Unit Root Case (2)	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	-12.5	-13.3	-13.7	-13.9
		-17.2	-18.9	-19.8	-20.13
	$\tau$	-3.00	-2.93	-2.89	-2.883
		-3.75	-3.58	-3.51	-3.48
	t	1.714	1.6788	1.6628	1.645
		2.500	2.4098	2.3697	2.326

\*القيمة الجدولية عند مستوى دلالة 0.05.

\*\*القيمة الجدولية عند مستوى دلالة 0.01.



الجدول (4): يبين معدل القيم المحتسبة لإحصاءات اختبار جذر الوحدة لـ ( حالة 1 ، حالة 2 )  
 لحجوم عينات مختلفة من 1000 تكرار

	n	25			50			100			200		
	$\phi_1$	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	$\tau$	t	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	$\tau$	T	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	$\tau$	t	$n(\hat{\phi}_1 - 1)$	$\tau$	t
Case (1)	0.80	6.411	1.74	1.74	11.629	2.441	2.441	12.569	3.384	3.384	16.531	3.561	3.561
	0.90	4.022	1.256	1.256	6.703	1.727	1.727	10.528	2.351	2.351	13.803	3.309	3.309
	0.95	2.900	0.998	0.998	4.35	1.284	1.284	6.807	1.704	1.704	11.923	2.359	2.359
	0.99	2.471	0.916	0.916	2.532	0.920	0.920	3.045	0.992	0.992	3.918	1.178	1.178
	1.00	2.238	0.902	0.902	2.116	0.872	0.872	2.341	0.910	0.910	2.731	0.861	0.861
	1.02	1.814	0.958	0.958	1.906	1.224	1.224	2.119	2.830	2.830	2.104	3.126	3.126
Case (2)	1.05	1.971	1.405	1.405	2.413	4.417	4.417	4.385	5.279	5.279	4.986	7.381	7.381
	0.80	8.925	2.096	2.096	13.827	2.681	2.681	15.962	3.528	3.528	17.137	3.849	3.849
	0.90	6.858	1.742	1.742	9.307	2.07	2.07	13.857	2.588	2.588	15.609	3.479	3.479
	0.95	5.997	1.570	1.570	7.287	1.755	1.755	9.544	2.058	2.058	14.443	2.609	2.609
	0.99	5.065	1.396	1.396	5.482	1.449	1.449	5.705	1.477	1.477	6.230	1.560	1.560
	1.00	4.843	1.341	1.341	4.592	1.256	1.256	4.269	1.187	1.187	3.443	1.003	1.003
	1.02	3.88	1.125	1.125	3.153	0.930	0.930	2.149	1.004	1.004	3.857	3.756	3.756
1.05	3.108	0.936	0.936	2.547	0.811	0.811	4.895	5.341	5.341	7.999	18.606	18.606	