المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (21) 2012
ص ص [166-188]

التحليــــل الإحصائــي للعمليـــــة التصادفيـــــــة الهندسيــــة مع التطبيــــــق

د. مثنى صبحي سليمان[1]   شيماء وليد محمود[2]

المستخلص

يعدّ موضوع العملية التصادفية الهندسية من المواضيع التي تلاقي اهتماما كبيـراً وواسعاً لدى العديد من الباحثين في الوقت الحاضر لما له من أهمية في شتى المجـالات المختلفة. وتُعدّ العملية الهندسية تعميماً لعملية التجديد.

لقد خُصِص هذا البحث لدراسة العملية الهندسية وتحليلها ، والمقارنة بين نمـوذج العملية الهندسية ونموذج عملية التجديد، فضلاً عن تقدير الدالة الهندسية من خلال استخدام الحل العددي والحل التقريبـــــــي. وتضمن البحث تطبيقاً واقعياً لحـالات الإصـابة بالتهاب الكبد الفيروسي نوعي *A* و*B* في محافظة نينوى. وقد تم إجراء تحليل إحـصائي للعملية الهندسية، واختبار ملاءمة البيانات للعملية الهندسية، وتم تقـدير العـدد المتوقّـع لحالات الإصابة بالتهاب الكبد الفيروسـي نـوع *A* و*B* مـع المقارنـة بـين طرائـق التقديـــر.

وقد بين البحث أن العملية الهندسية ملائِمةُ للبيانات وللأنواع كافـة، وأن نمـوذج العملية الهندسية أفضل من نموذج عملية التجديد. كما توصل إلى أن العدد المتوقّع لحالات الإصابة بالتهاب الكبد الفيروسي باستخدام الحل العددي أفضل وأكثر دقةً مـن اسـتخدام الحل التقريبي في التقدير.

الكلمات الدالة: العملية الهندسية، الدالة الهندسية، التهاب الكبد الفيروسي.

[1] مدرس/ قسم الإحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل
[2] باحث / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ التسليم 2011/11/22 ـــــــــــــــ تاريخ القبول 2011/12/25

Statistical Analysis of Geometric Stochastic Process with Application

Abstract

The subject of geometric stochastic process is regarded as one of the subjects that currently meet great and wide concern among researchers currently due to its importance in different fields. The geometric process is regarded as a generalization to the renewal process.

This research is devoted to the study and analysis of the geometric process, and the comparison between the geometric process model and the renewal process model, as well as the estimation of the geometric function through the use of the numerical solution and the approximate solution. It includes actual application about the cases of infection with viral hepatitis types A, B in Nineveh governorate. A statistical analysis is performed for the geometric process, as well as the test for suitability of the data to the geometric process, the expected number of infection cases with viral hepatitis type A and B, was estimated with comparison between the methods estimation.

This research revealed that the geometric process is suitable for the data of viral hepatitis, and that the geometric process model is better than the renewal process model. The study also showed that the expected number for cases of infection with viral hepatitis by using the numerical solution is better and more accurate than using the approximate solution in estimation.

Keyword: *geometric process, geometric function, viral hepatitis.*

(1) العملية الهندسية: *Geometric Process (GP)*

تعد العملية الهندسية *GP* من العمليات الرتيبة والبسيطة، وتعـود فكـرة العمليـة الهندسية إلى الباحث [*Lam*] عام 1988، إذ يعد أول مـن قـدم هـذه العمليـة ودرس خصائصها بشيء من التفصيل، وعدها تعميماً لعملية التجديد. وهناك العديد من الدراسات والبحوث الحديثة قامت بتطوير وتحسين هذه العملية نظرياً وتطبيقياً.

لو فرضنا أن العملية التصادفية $\{X_n, n=1,2,...\}$ ذات المتغيرات العشوائية غير السالبة عملية هندسية GP وان القيمة a هي قيمة حقيقية أكبر من الصفر $(a>0)$، وتمثل a **نسبة العملية الهندسية** (*Ratio of the GP*) والتي تقيس الاتجاه وقوته.

وتكون **الدالة التوزيعية** (*Distribution Function*) **ودالة الكثافة الاحتمالية** (*Probability Density Function*) للعملية الهندسية على التوالي بالصيغة الآتية:

[*Lam and Zhang*, 2003]

$$F_n(x) = F\left(a^{n-1}x\right) \qquad \forall \quad n=1,2,... \qquad ... (1)$$

$$f_n(x) = a^{n-1} f(a^{n-1}x). \qquad ... (2)$$

(2) خصائص العملية الهندسية: *Properties of Geometric Process*

يمكن إجمال خصائص العملية الهندسية بالنقاط الآتية: [*Lam*, 2010]

1- تكون العملية الهندسية GP متزايدة عشوائياً إذا كانت النسبة $0<a\leq 1$، وتكون متناقصة عشوائياً إذا كانت النسبة $a\geq 1$، في حين تكون العملية الهندسية عملية تجديد عندما النسبة $a=1$ وبذلك فإن العملية الهندسية تكون تعميمها لعملية التجديد.

2- إن توقع S_n يقترب من توقع S عندما $n\rightarrow\infty$ أي إن:

$$E(S) = \lim_{n\rightarrow\infty} E(S_n)$$

إذ إن:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

3- إذا كانت العملية التصادفية $\{X_n, n=1,2,...\}$ عملية هندسية بالنسبة a، وعلى افتراض إن:

$$E[X_1] = \mu \quad , \quad Var[X_1] = \sigma^2 \qquad ... (3)$$

فان التوقع والتباين للعملية الهندسية هما على التوالي:

$$E[X_n] = \frac{\mu}{a^{n-1}} \qquad ... (4)$$

$$Var\left[X_n\right]=\frac{\sigma^2}{a^{2(n-1)}} \qquad \dots (5)$$

وعليه فإن المعلمات a و μ و σ^2 تمثل معلمات مهمة للعملية الهندسية GP.

(3) الاستدلال الإحصائي للعملية الهندسية:

Statistical Inference of Geometric process

تعد دراسة الاستدلال الإحصائي للعملية الهندسية من المواضيع الضرورية للعملية الهندسية، فعند التطبيق على بيانات حقيقية يواجه الباحث العديد من المـشاكل الأساسـية ذوات العلاقة، أهمهـــا ملاءمة بيانات الدراسة للعملية التصادفية الهندسية، ولحل هـذه المشكلة نفرض أن لدينا العملية التصادفية $\{X_i, i=1,2,...\}$, ونفرض أن هناك المتتاليـات الأربعة الآتية: [*Lam*, *et al*., 2004, 263-282]

$$U_i = X_{2i} / X_{2i-1} \quad , \quad U_i' = X_{2i+1} / X_{2i} \quad , \quad i=1,2,... \qquad \dots (6)$$

ولأي عدد صحيح ثابت مثل m, نفرض أن:

$$V_i = X_i X_{2m+1-i} \quad , \quad V_i' = X_{i+1} X_{2m+2-i} \quad , \quad i=1,2,...,m \qquad \dots (7)$$

لقد اقترح الباحث *Lam* عام 1992 تطبيق المتتاليات الأربعة من المتغيـرات العـشوائية المذكورة آنفاً كي يتمكن من استخدام جميع المعلومات المعنية في مجموعة البيانات$\{X_i\}$، وقد اختار اثنتين من المتتاليات الأربعة للاختبار وكما يأتي: [*Lam*, 2007,103]

1- إذا كانت $n=2m+1$ عدداً فردياً، تتم صياغة المتتاليتين:

$$\{U_i, i=1,2,...,m\} \quad and \quad \{V_i', i=1,2,...,m\} \qquad \dots (8)$$

أو المتتاليتين

$$\{U_i', i=1,2,...,m\} \quad and \quad \{V_i, i=1,2,...,m\} \qquad \dots (9)$$

2- أما إذا كانت $n=2m$ عدداً زوجياً، تتم صياغة المتتاليتين:

$$\{U_i, i=1,2,...,m\} \quad and \quad \{V_i, i=1,2,...,m\} \qquad \dots (10)$$

وعليه يتم اختبار فيما إذا كانت مجموعة البيانات $\{X_i, i=1,2,...\}$ تتفق مع العملية الهندسية GP وذلك من خلال اختبار فيما إذا كانت المتغيرات العشوائية في المتتاليات الأربعة مستقلة ومتماثلة التوزيع ($i.i.d$) أم لا, وللقيام بذلك فإنه يتم تطبيق الاختبارين الآتيين:

- **اختبار اختلاف الإشارة:** ***The Difference – Sing Test***

إن صيغة المختبر الإحصائي لاختبار اختلاف الإشارة يعرف بالصيغة الآتية:

$$D(W) = \left[D_W - \frac{m-1}{2} \right] \Big/ \left[\frac{m+1}{12} \right]^{1/2} \qquad ... (11)$$

إذ إن:

$$D_W = \sum_{i=2}^{m} I_{(W_i > W_{i-1})}$$

وباستبدال W_i مع كل من (U_i و V_i) أو (U'_i و V'_i) في المعادلة (11) يتم الحصول على قيم ($D(U)$ و $D(V)$) أو ($D(U')$ و $D(V')$) .

- **اختبار نقطة التحول:** ***The Turning Point Test***

إن صيغة المختبر الإحصائي لاختبار نقطة التحول يعرف بالصيغة الآتية:

$$T(W) = \left[T_W - \frac{2(m-2)}{3} \right] \Big/ \left[\frac{16m-29}{90} \right]^{1/2} \qquad ... (12)$$

إذا إن:

$$T_W = \sum_{i=2}^{m-1} I_{(W_i - W_{i-1})(W_{i+1} - W_i) < 0}$$

وباستبدال W_i مع كل من (U_i و V_i) أو (U'_i و V'_i) في المعادلة (12) يتم الحصول على قيم ($T(U)$ و $T(V)$) أو ($T(U')$ و $T(V')$).

ومن المعلومات السابقة يتم إيجاد قيم P المحسوبة وكالآتي:

$$P_T^U = \begin{cases} P(\,|Z| \geq T(U)\,) \\ P(\,|Z| \geq T(U')\,) \end{cases} \qquad ... (13)$$

$$P_D^U = \begin{cases} P\,(\,|\,Z\,| \ge D(U)\,) \\ P\,(\,|\,Z\,| \ge D(U')\,) \end{cases} \qquad \dots (14)$$

$$P_T^V = \begin{cases} P\,(\,|\,Z\,| \ge T(V)\,) \\ P\,(\,|\,Z\,| \ge T(V')\,) \end{cases} \qquad \dots (15)$$

$$P_D^V = \begin{cases} P\,(\,|\,Z\,| \ge D(V)\,) \\ P\,(\,|\,Z\,| \ge D(V')\,) \end{cases} \qquad \dots (16)$$

(4) تقدير المعلمات باستخدام نموذج العملية الهندسية: [*Lam*,2008,1-8]

Estimating the Parameters by Geometric Process Model.

لتقدير معلمات للعملية الهندسية نفرض أن:

$$X_1 = a^{i-1}\ X_i\ , \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad \dots (17)$$

إذ تمثل $X_1's$ متتابعـة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع. وباسـتخدام نمـوذج الانحـدار الخطـي تـم الحـصول علـى **مقـدرات المربعـات الـصغرى** (*Least Squares Estimators*) للمعلمة a حسب الصيغة الآتية:

[*Lam*, 1992, 2083-2105]

$$\hat{a} = \exp\{\frac{6}{(n-1)\,n\,(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\ln X_i\} \qquad \dots(18)$$

أما العزوم للمعلمة μ والمعلمة σ^2 فيمكن تقديرهما على التوالي كالآتي:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \overline{\hat{X}_1} & , \quad a \ne 1 \\ \overline{X} & , \quad a = 1 \end{cases} \qquad \dots (19)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\hat{X}_1 - \overline{\hat{X}_1})^2 & , \quad a \ne 1 \\ \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 & , \quad a = 1 \end{cases} \qquad \dots (20)$$

إذ إن:

$$\hat{X}_1 = \hat{a}^{i-1}\ X_i$$

(5) الدالة الهندسية: *Geometric Function*

إن للعمليــة الهندســية GP دالــة تــسمى الدالــة الهندسية $M(t,a)$، وكما هو معلوم أن الباحث Lam يعد أول من قدم العمليـة الهندسـية، وهو أيضاً أول من قدم الدالة الهندسية ودرس خصائصها عام 1988. فإذا كانت العمليـة التصادفية $\{X_n, n=1,2,...\}$ تمثل عملية هندسية بالنسبة لـ a، وأن:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad ...(21)$$

وكان عدد الحوادث في الفترة t هو:

$$N(t) = \sup\{ n \mid S_n \le t \} \qquad t \ge 0 \qquad ...(22)$$

فإن الدالة الهندسية هي العدد المتوقع للحوادث التي تحدث في الفترة t، أي أن:

$$M(t,a) = E[N(t)] \qquad ...(23)$$

والدالة الهندسية تقترب من دالة التجديد عندما $(a=1)$، أي أن:

$$M(t,1) = M(t) \qquad ...(24)$$

إذ أن $M(t)$ هي دالة التجديد، وعليه يمكن القول أن الدالة الهندسـية هـي تعمـيم لدالـة التجديـد. كما إن للدالة الهندسية معادلة تكاملية تسمى المعادلة الهندسـية وهـي وفـق الصيغة الآتية:

$$M(t,a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u),a)\, dF(u) \qquad ...(25)$$

وإذا كانت الكثافة الاحتمالية للمتغير X_1 هي f فإن المعادلة (25) ستكون بالشكل الآتي:

$$M(t,a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u),a)\, f(u)\, du \qquad ...(26)$$

(6) خـصائص الدالـة الهندسـية: *Properties of Geometric Function*

إذا كانت العملية التصادفية الهندسية $\{X_n, n=1,2,...\}$ بالنسبة a، فإنه يمكن إجمـال خصائص الدالة الهندسية بالنقاط الآتية: [Lam,1988,366-377]

1. تكون الدالة الهندسية $M(t,a)$ منتهية ولجميع قيم $t \ge 0$ عندما تكون النـسبة a محصورة بين $[0,1)$، وكذلك $N(t)$ تكون منتهية أيضاً مع احتمال واحد.

2. تكون الدالة الهندسية $M(t,a)$ غير منتهية ولجميع قيم $t>0$ عندما تكون النسبة a أكبر من الواحد.

(7) تقدير الدالة الهندسية: *Estimation of Geometric Function*

يتم تحديد الدالة الهندسية من خلال إيجاد الحل للمعادلة الهندسية، ويتم ذلك من خلال استخدام عدة طرائق منها الحل العددي والحل التقريبي وكما يأتي:

أ) الحل العددي: *Numerical Solution*

يعد الحل العددي للمعادلة الهندسية من الطرائق المهمة والجيدة في تحديد الدالة الهندسية $M(t,a)$، فعندما تكون $0<a\le 1$ فإن الحل العددي للمعادلة الهندسية يكون باستخدام قاعدة شبه المنحرف للتكامل، ويمكن إجمال خطوات خوارزمية الحل بالآتي: [*Lam*, 2007, 91]

1- تقسيم الفترة $[0,T]$ إلى فترات ثانوية N مع طول يساوي $h=T/N$.

2- إيجاد قيم $F(T_i)$ و $f(T_i)$ من قيم F و f عند العقد $T_i=i*h$ لكل $i=1,2,...,N$.

3- نرمز للحل العددي للمعادلة الهندسية بالرمز Λ_i.

4- نفرض أن $\Lambda_0=0$.

5- حساب قيم Λ_i لكل $i=1,2,...,N$ من المعادلة التالية وبشكل تكراري، وتكون بالصيغة الآتية:

$$\Lambda_i = F(T_i)+\frac{h}{a}\sum_{i=1}^{[ai]-1}\Lambda_k f(T_i-\frac{t_k}{a})+\frac{h}{2a}\Lambda_{[ai]}f(T_i-\frac{T_{[ai]}}{a})+\frac{aT_i-T_{[ai]}}{2a}\Lambda_{[ai]}\ f(T_i-\frac{T_{[ai]}}{a})$$
$$i=1,2,...,N \qquad ...(27)$$

ب) الحل التقريبي: *Approximate Solution*

يعد الحل التقريبي من الطرائق الجيدة والبسيطة من ناحية التطبيـق، إذ يمكننـا الحصول علـــى تقدير للدالة الهندسية $M(t,a)$ من خلال استخدام **تحويـل لابـلاس** (*Laplace Transform*) لطرفي الدالة الهندسية $M(t,a)$ وكما يأتي:[*Lam*, 2007, 83]

$$M^*(s,a)=\frac{f^*(s)}{s}+\frac{1}{a}M^*(\frac{s}{a},a)\,f^*(s) \qquad ...(28)$$

إذ أن الدالة $M^*(s,a)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة الهندسية $M(t,a)$، وكذلك $f^*(s)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $f(x)$. وكما هو ملاحظ إذا كانت النسبة $a \neq 1$، فإن عملية التقدير تكون معقدة نوعاً ما. وعليه فإن الحل التقريبي بعد اخذ المعكوس لتحويل لابلاس للدالة الهندسية يكون وفق الصيغة الآتية:

$$M(t,a) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2} + \{\frac{t^2}{2\mu^2} + \frac{(\sigma^2-\mu^2)\,t}{2\mu^3}\}\,(a-1)$$
$$+\{\ \frac{t^3}{3\mu^3} + \frac{3(\sigma^2-\mu^2)t^2}{4\mu^4} + \frac{t}{12\mu^5}[9\,(\mu^2+\sigma^2)^2 - 12\,\mu^2\sigma^2 - 4\mu M_3]$$
$$+\frac{1}{24\mu^6}[(9\mu^2+15\,\sigma^2)(\mu^2+\sigma^2)^2 - 4\mu\,M_3(3\mu^2+4\sigma^2) + 3\mu^2 M_4]\ \}(a-1)^2$$
$$+o(1). \qquad 0 < a \le 1 \qquad ...(29)$$

وعليه فان الدالة الهندسية عندما X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً ستكون بالصيغة الآتية:

$$M(t,a) = \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}(a-1) + \frac{t^3}{3\lambda^3}(a-1)^2 + o(1). \qquad 0 < a \le 1 \qquad ...(30)$$

كما إن الدالة الهندسية عندما X_1 يتوزع توزيع كاما ستكون بالصيغة الآتية:

$$M(t,a) = \frac{\beta t}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha^2}[\beta t^2 + (1-\alpha)\,t]\,(a-1)$$
$$+\frac{1}{24\alpha^3}\,\{8\beta^3\,t^3 + 18\,(1-\alpha)\,\beta^2\,t^2 + 2\,(1-\alpha)\,(1-5\alpha)\,\beta t$$
$$+(1-\alpha^2)\,\}(a-1)^2 + o(1). \qquad ...(31)$$

ولغـرض المقارنـة بـين طرائـق التقـدير يـتم اسـتخدام **خطـا النـسبة الأعظـم** (*Maximum Percentage Error*) الذي يهتم بالتركيب الفردي لمجموعـة البيانـات ويكون وفق الصيغة الآتية:

$$MPE = \max_{1 \le i \le n}\left\{\left|T_i - \hat{T}_i\right| / T_i\right\} \qquad ...(32)$$

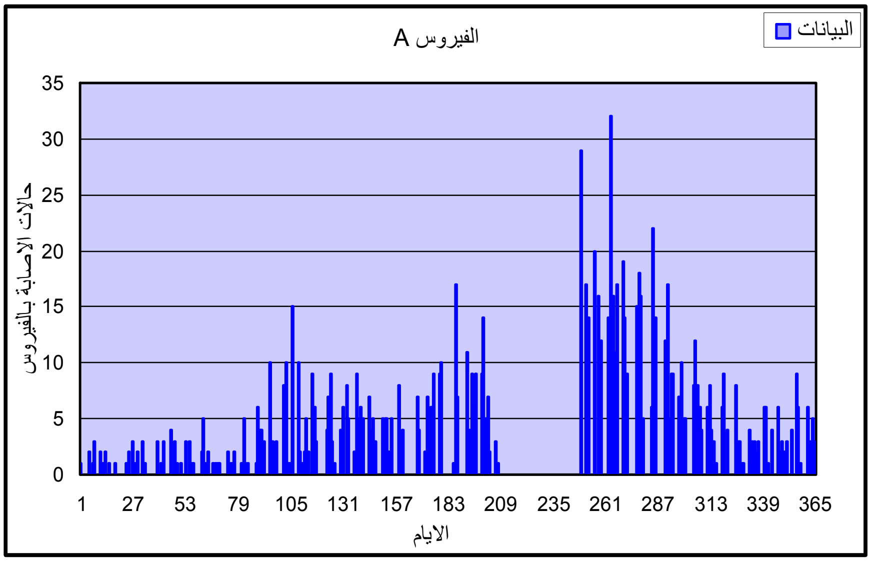
إذا إن:

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j \qquad and \qquad \hat{T}_i = \sum_{j=1}^{i} X_j \qquad ...(33)$$

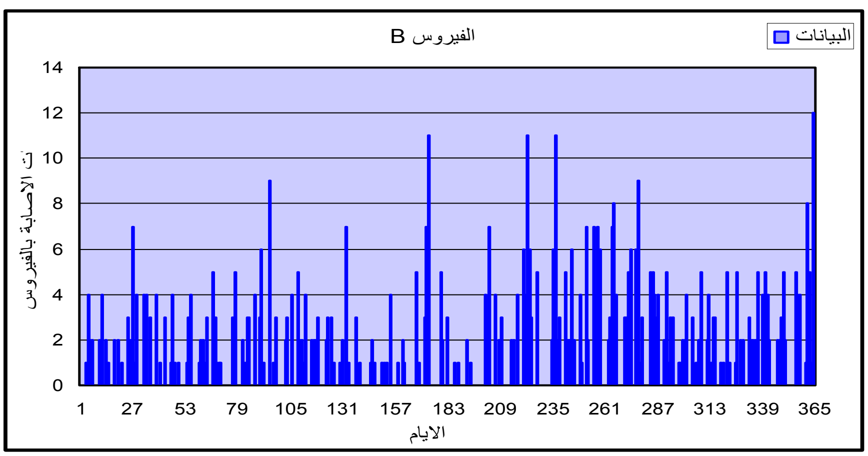
(8) الجانب التطبيقي:

يعد وباء التهاب الكبد الفيروسي من الأوبئة التي لاقت اهتماما كبيراً فـي معظـم دول العالم، وقد تناول الجانب التطبيقي من البحث هذا الوباء وخصوصاً إن هنالك عـدداً ليس بالقليل من المصابين بهذا الوباء في العراق.

تم جمع البيانات من وحدة التهاب الكبد الفيروسي/ مختبر الـصحة العامـة فـي نينـ---ـوى، إذ تضمنت البيانات عدد حـالات الإصـابة بالتهـاب الكبـد الفيروسـي مـن الأنـواع A وB في مدينة الموصل، وبشكل سلسلة زمنية يومية للفتـرة مـن 2010/4/1 لغايـة 2011/3/31، وكما موضحة في الشكلين الاتيين:

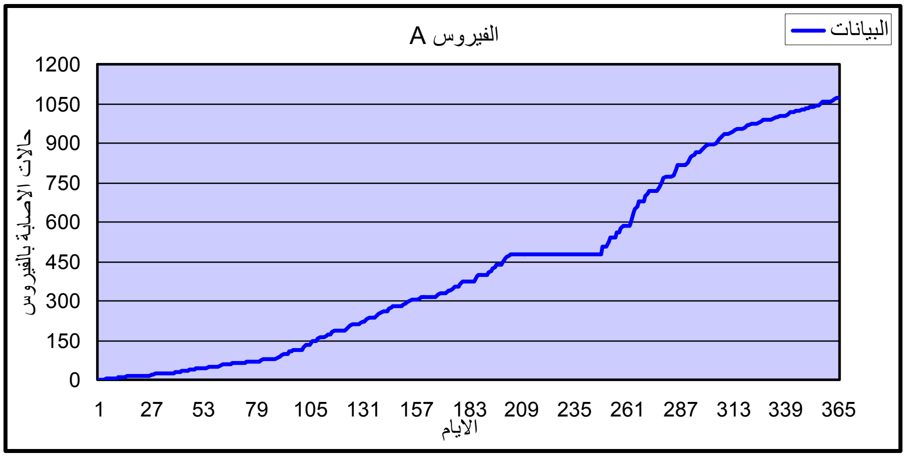


الشكل (1): بيانات التهاب الكبد الفيروسي A

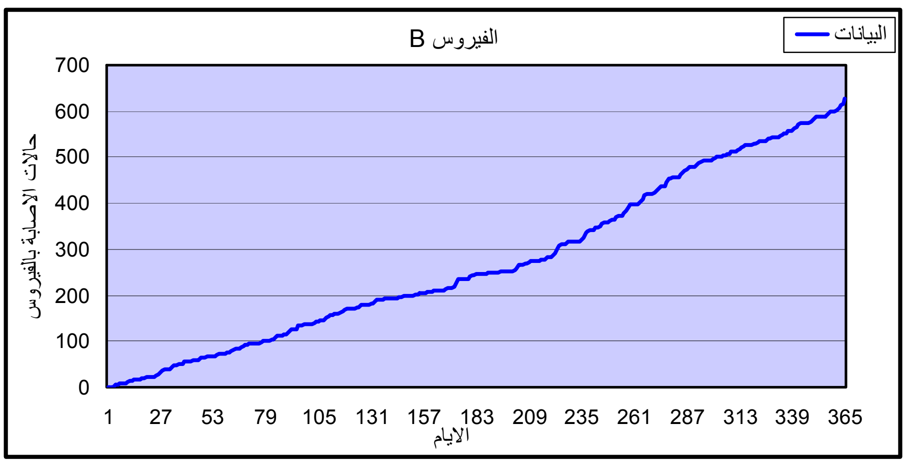


الشكل (2): بيانات التهاب الكبد الفيروسي B

ويبين الشكلان (1) و(2) عشوائية الحدوث لبيانات التهاب الكبد الفيروسي من كلا النوعين، أما الدالة التراكمية لتلك البيانات فموضحة في الشكلين الاتيين:



الشكل (3): الدالة التراكمية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي *A*



الشكل (4): الدالة التراكمية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي *B*

يوضح الشكلان (3) و(4) إن الدالة التراكمية لتلك البيانات في اتجاه التزايد بشكل منتظم مع مرور الزمن.

(9) اختبار بيانات التهاب الكبد الفيروسي *A* و *B*:

Test Data of Hepatitis A and B

لاختبار فيما إذا كان مجموعة بيانات التهاب الكبد الفيروسي A و B تتبع العملية الهندسية أم لا ، يتم اختبار الفرضية الآتية:

H_0: بيانات التهاب الكبد الفيروسي تتبع العملية الهندسية

H_1: بيانات التهاب الكبد الفيروسي لا تتبع العملية الهندسية

ومن الفقرة (3) يتم اختبار فيما إذا كانت مجموعة البيانات $\{X_i, i=1,2,...\}$ تتفق مع العملية الهندسية GP وذلك من خلال اختبار فيما إذا كانت المتغيرات العشوائية في المتتاليات الأربعة مستقلة ومتماثلة التوزيع ($i.i.d$) أم لا، وذلك للحصول على قيم P المحسوبة، الموضحة في الجدول (1) بالآتي:

الجدول (1): قيم P لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A و B

Hepatitis	P_T^U	P_D^U	P_T^V	P_D^V
A	0.2340	0.1212	0.1032	0.1212
B	0.6966	0.7872	0.1164	0.0524

من الجدول أعلاه يلاحظ أن جميع قيم P اكبر من 0.05 مما يدل على إن بيانات التهاب الكبد الفيروسي A و B ملائمة للعملية الهندسية.

(10) تقدير معلمات العملية الهندسية:

Parameters Estimate of The Geometric Process

بعد أن تبين لنا بأن مجموعة بيانات التهاب الكبد الفيروسي A وB تتبـع العمليـة الهندسية وملائمة لها، يتم تقدير معلمات العملية الهندسية للبيانات الموضحة في الجـدول (2)، وكما هو معلوم فإن لكل عملية هنالك معلمات خاصة بها متمثلة بـ (a,μ,σ^2) وكما يأتي:

الجدول (2) : معلمات العملية الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي

Hepatitis	*Parameters Estimation*		
	a	μ	σ^2
A	0.99	2.2432	1.2046
B	0.99	1.7947	1.0714

ولاختبار كفاءة نموذج العملية الهندسية مع عمليات أخرى تم اختيار نموذج عملية التجديد *RP* للمقارنة، ولإجراء المقارنة فقد تم تقدير معلمات عملية التجديد (a,μ,σ^2) لبيانات التهاب الكبد الفيروسي نوع *A* و *B* والموضحة في الجدول (3) بالأتي:

الجدول (3) : معلمات عملية التجديد لبيانات التهاب الكبد الفيروسي

Hepatitis	*Parameters Estimation*		
	a	μ	σ^2
A	1	3.0492	2.3809
B	1	2.5789	2.2737

أما معيار المقارنة فقد تم استخدام متوسط مربعات الخطأ (*Mean Squared Error*) الذي يقيس التركيب العام المناسب والذي يكون وفق الصيغة الآتية:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X}_i)$$

والجدول (4) يوضح قيم متوسط مربعات الخطأ لكل من نموذج العملية الهندسية ونموذج عملية التجديد ولنوعي التهاب الكبد الفيروسي *A* و*B*.

الجدول (4) : قيم *MSE* لنموذج العملية الهندسية وعملية التجديد للبيانات قيد الدراسة

Models	*MSE*	
	A	*B*
GP	2.1828	1.9674
RP	2.3418	2.2438

يلاحظ من الجدول (4) أن قيم متوسط مربعات الخطأ *MSE* لنوعي بيانات التهاب الكبد الفيروسي لنموذج العملية الهندسية أقل من قيم متوسط مربعات الخطأ *MSE* لنموذج عملية التجديد، مما يدل على أن نموذج العملية الهندسية أفضل وأكثر ملاءمة من نموذج عملية التجديد في توفيق البيانات قيد الدراسة لنوعي التهاب الكبد الفيروسي.

(11) الدالة الهندسية (العدد المتوقع للإصابة بالتهاب الكبد الفيروسي):

Geometric Function (Expected Number of Injured Viral Hepatitis)

بعد اختبار البيانات لأنواع التهاب الكبد الفيروسي كافة بنموذج العملية الهندسية GP وتقدير معلمات هذه العمليات، لوحظ أن قيمة المعلمة a والتي تمثل نسبة العملية الهندسية محصورة بين الصفر والواحد لبيانات التهاب الكبد الفيروسي من نوع A وB، وعليه يمكن إيجاد حل الدالة الهندسية لهذه البيانات كما بينها الباحث [*Lam*, 2007]، أي يمكن إيجاد العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس من نوع A وB.

وسيتم لاحقاً تقدير الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A وB وباستخدام عدة أنواع من التوزيعات الاحتمالية.

أ) الدالة الهندسية عندما تكون X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً:

Geometric Function When X_1 Distributed Exponential Distribution

على فرض أن X_1 في الصيغة (17) يتوزع توزيعاً أُسياً بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$، وعليه فان الدالة الهندسية لالتهاب الكبد الفيروسي A وB باستخدام الحل التقريبي والحل العددي للدالة ستكون كما يأتي:

- **الحل التقريبي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A:**

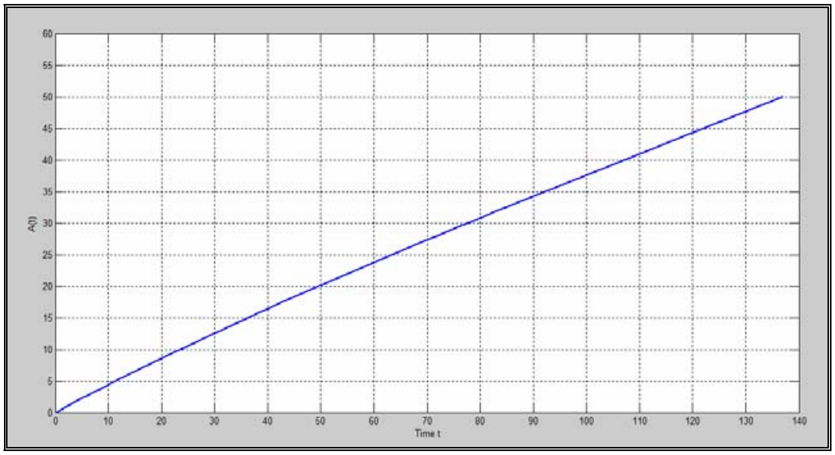
بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$ ومن خلال تقدير المعلمات لالتهاب الكبد الفيروسي A تبين أن مقدر المعلمة λ هو:

$$\hat{\lambda} = 2.2432$$

وكما هو معلوم سابقاً بأن $a = 0.99$ و$N = 61$ تمثل عدد الفترات و$T = 137$ وعليه فان الفترة ستكون $[0,137]$، أما طول الفترة فهو $h = 2.2459$ ومتساوٍ لجميع الفترات، ومن خلال تعويض القيم أعلاه في المعادلة (30) تم الحصول على الدالة الهندسية:

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \frac{t}{2.2432} - \frac{0.01}{10.0639}t^2 + \frac{0.0001}{33.8630}t^3 \qquad ...(33)$$

وباستخدام البرنامج المعد لهذا الغرض وباللغة الحاسوبية *MATLAB V.7.6* تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية. وقد رسمت الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A وكما موضح في الشكل (5) بالأتي:



الشكل (5): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A عندما X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً وباستخدام الحل التقريبي

- **الحل التقريبي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B:**

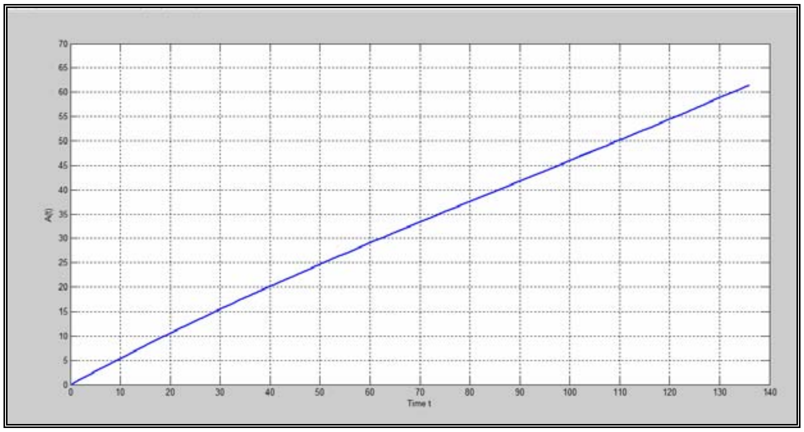
بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$ ومن خلال تقدير المعلمات لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B تبين أن قيمة المعلمة λ تكون وفق الأتي:

$\hat{\lambda} = 1.7947$

وكما هو معلوم سابقاً بأن $a = 0.99$ و $N = 67$ وتمثل عدد الفترات و$T = 136$ وعليه فإن الفترة ستكون $[0,136]$، أما طول الفترة فهو$h = 1.7895$ ومتساوٍ لجميع الفترات، ومن خلال تعويض القيم أعلاه في المعادلة (30) تم الحصول على الدالة الهندسية:

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \frac{t}{1.7947} - \frac{0.01}{6.4419} t^2 + \frac{0.0001}{17.3419} t^3 \qquad \ldots (34)$$

وباستخدام نفس البرنامج السابق تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهـذا الفيروس في الفترة الزمنية. وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B وكما موضح في الشكل (6) بالأتي:



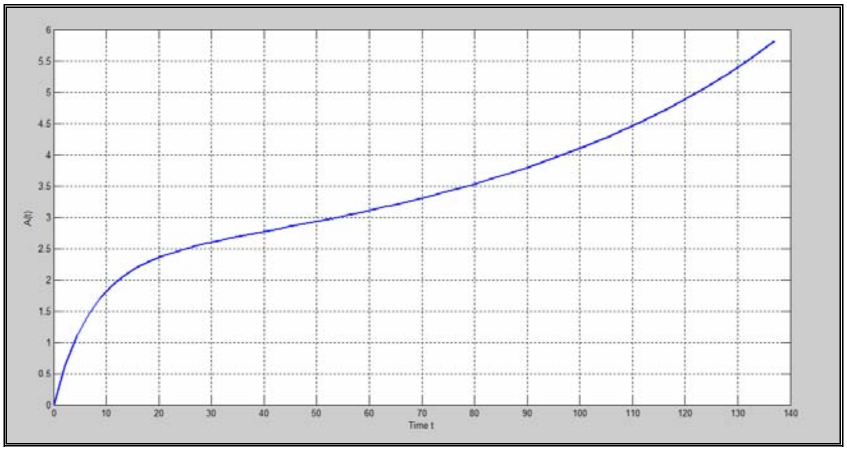
الشكل (6): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B عندما X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً وباستخدام الحل التقريبي

- **الحل العددي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A:**

بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$ وكما معلوم سابقاً أن

$E[X_1] = \lambda = 2.2432$

وإن $a = 0.99$ والفترة تكون [0,137] ومقسمة إلى فترات ثانويـة $N = 61$ مـع طـولٍ متساوٍ لجميع الفترات $h = 2.2459$ بالعقد $T_i = i * h$ ، وباسـتخدام البرنـــــــامج السابق نفسه، تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس فـي الفتـرة الزمنية. وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A وكما موضح فـي الشكل (7) بالأتي:



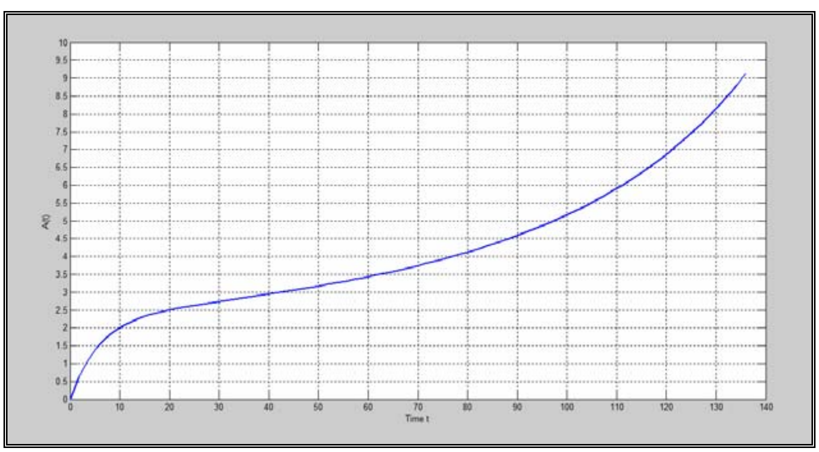
الشكل (7): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A عندما X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً وباستخدام الحل العددي

- **الحل العددي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B:**

بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيعاً أُسياً بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$ وكما معلوم سابقاً أن:

$$E[X_1]=\lambda=1.7947$$

وإن $a=0.99$ والفترة تكون $[0,136]$ ومقسمة إلى فترات ثانوية $N=76$ مع طول متساوٍ لجميع الفترات $h=1.7895$ بالعقد $T_i=i*h$ وباستخدام البرنامج السابق نفسه تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية. وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B وكما موضح في الشكل (8) بالأتي:



الشكل (8): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B عندما X_1 يتوزع توزيعاً أسياً باستخدام الحل العددي

ب) الدالة الهندسية عندما تكون X_1 يتوزع توزيع كاما:

Geometric Function when X_1 is Distributed Gamma Distribution

نفرض أن X_1 يتوزع توزيع كاما بالمعلمتين $\Gamma(\alpha,\beta)$. وعليـه يمكـن إيجـاد الدالـة الهندسية للبيانات وكما يأتي:

- **الحل التقريبي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A:**

بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيع كاما $\Gamma(\alpha,\beta)$ وكما معلوم أن:

$$\mu = 2.2432 \qquad and \qquad \sigma^2 = 1.2046$$

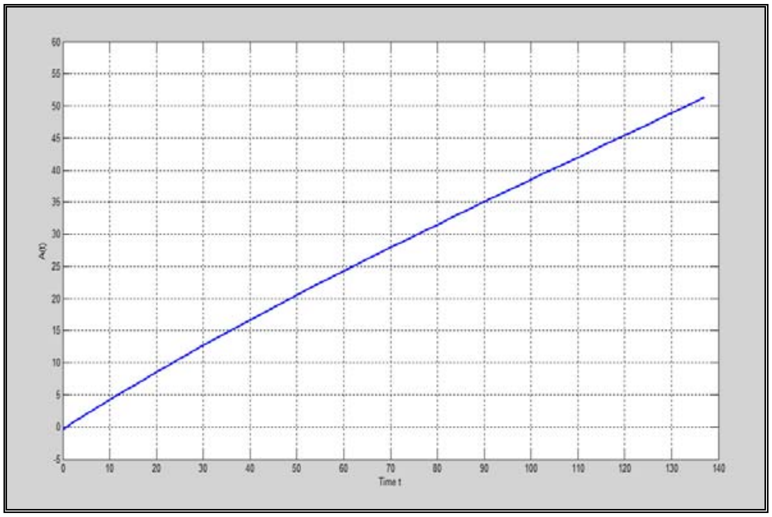
وأن $a = 0.99$ و$N = 61$ تمثل عدد الفترات علماً أن الفترة هي $[0,137]$، أما طول الفترة فيكون $h = 2.2459$ ومتساوياً لجميع الفترات وباستخدام طريقة العزوم يتم الحصول على تقدير للمعلمتين α وβ على وفق الآتي:

$$\hat{\alpha} = 4 \qquad and \qquad \hat{\beta} = 1.86$$

ومن خلال تعويض القيم أعلاه في المعادلة (31) تم الحصول على الدالة الهندسية:

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \frac{1}{1536}\{0.0051\ t^3 - 1.6793\ t^2 + 714.2612\ t - 576.0015\} \qquad ...(35)$$

وباستخدام البرنـــــامج السابق نفسه تم الحصول على العدد المتوقـع لحـالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية. وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A وكما موضح في الشكل (9) بالأتي:



الشكل (9): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A عندما X_1 يتوزع توزيع كاما باستخدام الحل التقريبي

- **الحل التقريبي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B:**

بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيع كاما $\Gamma(\alpha,\beta)$ وكما معلوم أن:

$$\mu = 1.7947 \qquad and \qquad \sigma^2 = 1.0714$$

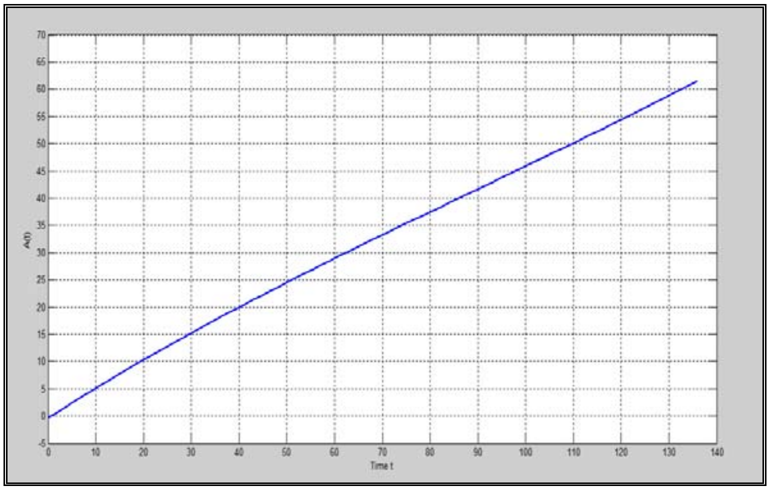
وأن $a = 0.99$ و $N = 76$ تمثل عدد الفترات والفترة ستكون $[0,136]$، أما طول الفترة فهو $h = 1.7895$ ومتساوٍ لجميع الفترات وباستخدام طريقة العزوم يتم الحصول على المعلمتين α و β على وفق الآتي:

$$\hat{\alpha} = 3 \qquad and \qquad \hat{\beta} = 1.68$$

ومن خلال تعويض القيم أعلاه في (31) تم الحصول على الدالة الهندسية:

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \frac{1}{648}\left\{0.0038\ t^3 - 1.0263\ t^2 + 364.099t - 216.0008\right\} \qquad \ldots(36)$$

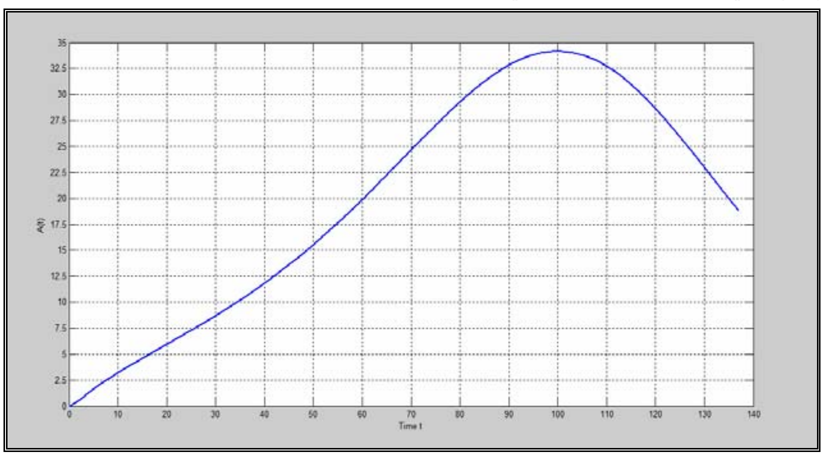
وباستخدام البرنامج السابق نفسه تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية. وقد رسمت الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B وكما موضح في الشكل (10) بالأتي:



الشكل (10): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B عندما X_1 يتوزع توزيع كاما وباستخدام الحل التقريبي

- **الحل العددي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A:**

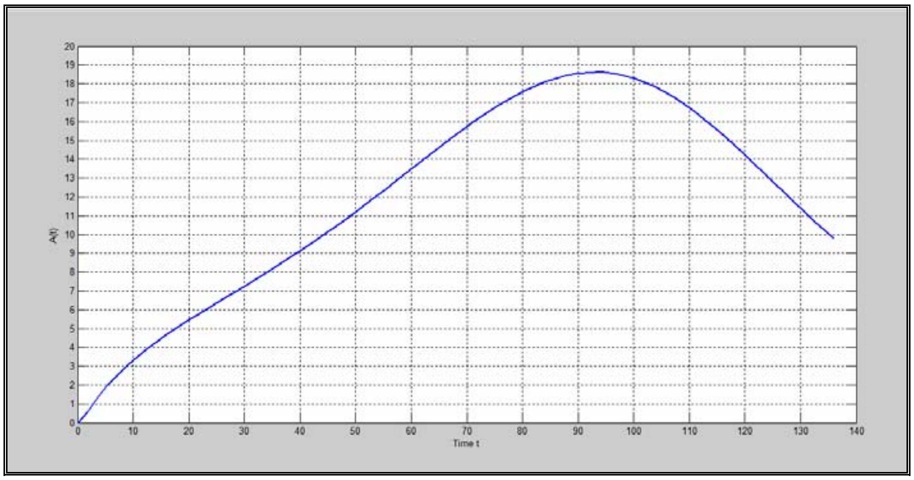
بعد فرض أن X_1 يتوزع توزيع كاما $\Gamma(\alpha,\beta)$ وكما معلوم أن $\Gamma(\alpha,\beta)=\Gamma(4,1.86)$ وأن $a=0.99$ والفترة هي $[0,137]$ ومقسمة إلى فترات ثانوية $N=61$ مع طولٍ متساوٍ لجميع الفترات $h=2.2459$ بالعقد $T_i=i*h$ وباستخدام البرنـــــــامج السابق نفسه تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية، وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A وكما موضح في الشكل (11) بالأتي:



الشكل (11): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي A عندما X_1 يتوزع توزيع كاما وباستخدام الحل العددي

- **الحل العددي للدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B:**

على فرض أن X_1 يتوزع توزيع كاما $\Gamma(\alpha,\beta)$، وكما معلوم أن $\Gamma(\alpha,\beta)=\Gamma(3,1.68)$ وأن $a=0.99$ والفترة هي $[0,136]$ ومقسمة إلى فترات ثانوية $N=76$ مع طولٍ متساوٍ لجميع الفترات $h=1.7895$ بالعقد $T_i=i*h$، وباستخدام البرنامج السابق نفسه تم الحصول على العدد المتوقع لحالات الإصابة بهذا الفيروس في الفترة الزمنية، وقد تم رسم الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B وكما موضح في الشكل (12) بالأتي:



الشكل (12): الدالة الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي B عندما X_1 يتوزع توزيع كاما وباستخدام الحل العددي

(12) اختبار جودة التوفيق: *Goodness of Fit test*

لغرض المقارنة بين الحل العددي والحل التقريبي تم استخدام خطا النسبة الأعظم MPE حسب الصيغة (32) وكما مبين بالجدول الآتي:

الجدول (4) : قيم *MPE* لبيانات التهاب الكبد الفيروسي

Dist.	Method	MPE	
		A	B
Exponential	Approximate	1.5350	4.7534
	Numerical	0.8361	0.9299
Gamma	Approximate	1.5217	3.0873
	Numerical	0.7833	0.9358

من الجدول (4) يتضح أن الحل العددي هو أفضل من الحل التقريبي وذلك لان قيم *MPE* للحل العددي لبيانات التهاب الكبد الفيروسي لكلا النوعين اقل من قيم *MPE* للحل التقريبي للبيانات نفسها.

(13) الاستنتاجات:

تم التوصل من البحث إلى مجموعة من النتائج التي يمكن إجمالها بالنقاط الآتية:

1- أظهر الرسم البياني لبيانات التهاب الكبد الفيروسي نوع *A* و *B* عشوائية الحدوث مما أكد نمذجة البيانات على وفق العملية الهندسية. وكما أظهر رسم الدالة التراكمية لتلـك البيانات أنها في اتجاه التزايد بشكل منتظم مع مرور الزمن.

2- عند تقدير معلمات العملية الهندسية لبيانات التهاب الكبد الفيروسي، تبـين أن بيانـات التهاب الكبد الفيروسي لكلا النوعين تمثل عملية هندسية متزايدة، وعليه يمكن نمذجتها على وفق الدالة الهندسية المنتهية.

3- من خلال إجراء اختبار مقارنة جودة التوفيق بين النماذج تبـين أن نمـوذج العمليـة الهندسية هو أفضل من نموذج عملية التجديد لبيانات التهاب الكبد الفيروسي وللأنواع كافة.

4- من خلال استخدام *MPE* لاختبار الطريقة الأفضل في تقدير الدالة الهندسية، تبين أن طريقة الحل العددي أفضل من طريقة الحل التقريبي في تقدير العدد المتوقع لحـالات الإصابة بالتهاب الكبد الفيروسي وللأنواع كافة، كما تبين أن بيانـات التهـاب الكبـد الفيروسي نوع *A* ملائمة للدالة الهندسية أكثر من بيانات التهاب الكبد الفيروسي نـوع *B*.

References المصادر:

1. Lam, Y. (1988), ***''Geometric Processes and Replacement Problem''***. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 4, 366-377.
2. Lam, Y. (1992), ***''Nonparametric Inference for Geometric Processes''***. Communications in Statistics Theory and Methods, 21, 2083-2105.
3. Lam, Y. and Zhang, Y, L. (2003), ***''A Geometric Process Maintenance Model for a Deteriorating System Under a Random Environment''***. IEEE Transactions on Reliability, 53, 83-89.
4. Lam, Y., Zhu, L. X., Chan, S. K. and Liu, Q. (2004), ***''Analysis of Data from a Series of Events by a Geometric Process Model''***. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 20, 263-282.
5. Lam, Y. (2007), ***''The Geometric Process and its Applications''***. World Scientic, Singapore.
6. Lam, Y. (2008), ***''Geometric Process''***. Encyclopedia of Statistical Sciences, John Wiley & Sons, Inc.
7. Lam, Y. (2010), ***''A Geometric Process Maintenance Model''***. Department of Statistics and Actuarial Science, The University of Hong Kong.