المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (14) 2008
ص ص [43–55]

التوزيع الاحتمالي لمقدر عامل انحدار الحرف المتحيز

هيفاء عبد الجواد سعيد* موفق محمد القصاب**

الملخص

تركز اهتمامنا في هذا البحث بالبحث على التوزيع الاحتمالي لعامل الحرف العشوائي وتم ذلك بوصف المقدر لمعلمات الانحدار بشكل مشابه للمقدر المتقلص وتم التوصل إلى دالة كثافة احتمال العامل المتقلص وهي من الدوال غير الشائعة وقد سهلت كتابة المعلمة المقدرة بالشكل المتقلص في عملية تحديد التوزيع الاحتمالي للمعلمة المقدرة

Probability Distribution of Biased Ridge Regression Factor

ABSTRACT

In this paper, we are concerned with the probability distribution of random ridge factor. The estimator of regression parameter is described as the shrunken estimator. Also we found the probability density function of the shrinkage factor which belongs to familiar probability density functions.

(1)- المقدمة

إن طريقة انحدار الحرف (Ridge Regression) ليست جديدة فقد قدمها لأول مرة (Hoerl & Kennard (1970 a,b واستخدماها في تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد وقد عرفا مجموعة من المقدرات التي توصف بالثابت (k) ،يدعى هذا الثابت بعامل الحرف (Ridge Factor) ووضعا مشروعاً لاختيار الثابت بمساعدة اثر الحرف (Ridge Trace) ولاحظا استقراراً في المقدرات عند قيم متغيرة موجبة للثابت، وهذه القيمة الصغيرة للثابت تجعل متوسط مربعات الخطأ

---

* مدرس/قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات
** استاذ/ كلية الاداب والعلوم/ قسم الرياضيات/ جامعة آل البيت

تاريخ التسلم : 10 /2008/3 ———— تاريخ القبول : 22 /2008/10

للمقدر اقل ما يمكن.وضع كثير من العلماء شروطاً حول اختيار الثابت (k) فقد وضع Theobald (1974) شرطاً بان يكون عامل الحرف ضمن الفترة $(0,\frac{2\sigma^2}{\underline{\beta}'\underline{\beta}})$ حيث أن σ^2يمثل تباين الخطأ العشوائي للمشاهدات و $\underline{\beta}$ يمثل متجه معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد.أما Obenchain (1978) اهتم بمناقشة الشرط الكافي على (k) والذي يقع ضمن الفترة $(0,\frac{2}{|\eta_p|})$ حيث أن η_p يمثل الجذر المميز السالب للمصفوفة $(X'X)^{-1}-\underline{\beta}'\underline{\beta}|\sigma^2$ وان جميع الطرائق المقدمة التي قدمها كثير من العلماء حول اختيار الثابت (k) تحتاج إلى معلومات سابقة عن σ^2 ومتجه المعلمات $\underline{\beta}$ وعادة تكون هذه المعلومات غير متوافرة عملياً،لذلك فقد يلجأ البعض إلى اختيار قيم سابقة مختلفة عن σ^2 و $\underline{\beta}$ Gunst and Mason (1977) وآخرون ويستخدم البعض الآخر مقدر المربعات الصغرى لتباين الخطأ العشوائي ومقدر المربعات الصغرى لمتجه معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد لتحديد القيمة الابتدائية لعامل الحرف Hoerl , Kennard (1970 a,b) و Hemmerle (1975) و Dwivedi , Srivastava & Hall (1980) وآخرون. يعامل عامل الحرف في هذه الحالة كمتغير عشوائي ولاقى باحثون كثيرون صعوبات كبيرة في تحديد التوزيع الاحتمالي لمقدر عامل الحرف ومقدر معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد بطريقة انحدار الحرف،في عام (1980) درس Dwivedi,Srivastara and hall دراسة العزم ذي المرتبة (r) حول نقطة الاصل لمعلمة نموذج الانحدار الخطي المعتمد المقدرة بطريقة انحدار الحرف،ودرس Firinguetti and Rubio (2000) العزوم حول الصفر لبعض مقدرات عوامل الحرف العشوائية في انحدار الحرف ودرسا Firinguetti and Rubio (2002) دالة كثافة الاحتمال والدالة التوزيعية التجميعية لنوعين من مقدرات عوامل الحرف العشوائية.لقد كان هدفنا في هذا البحث الاهتمام بدراسة

التوزيع الاحتمالي لمقدر عامل الحرف الذي قدمه Dwivedi ,Srivastava Hall (1980) فضلا عن التوزيع الاحتمالي.

يتناول المبحث الثاني وصفاً لنموذج الانحدار الخطي المتعدد مع مقدرات معلماته بطريقتي المربعات الصغرى وانحدار الحرف،تضمن المبحث الثالث التوزيع الاحتمالي لعامل الحرف العشوائي،واشتمل المبحث الرابع على البحث عن التوزيع الاحتمالي لمقدر معلمات انحدار الحرف.

(2)- وصف النموذج ومقدرات معلماته

من المعروف أن نموذج الانحدار الخطي العام :-

$$\underset{-}{Y} = X\underset{-}{\beta} + \underset{-}{U} \qquad ...(1)$$

الذي يكون فيه المتجه $\underset{-}{Y}$ ذا سعة $(n*1)$ ليمثل مشاهدات متغير الاستجابة و X مصفوفة مشاهدات المتغيرات التوضيحية ذات سعة $(n*p)$ وهي ذات رتبة كاملة والمتجه $\underset{-}{\beta}$ ذا سعة $(p*1)$ ليمثل متجه المعلمات المجهولة،أما الأخطاء العشوائية تتمثل بالمتجه $\underset{-}{U}$ ذي سعة $(n*1)$.

لو استخدمنا التحويل القانوني على النموذج المعرف في المعادلة (1) Hoerl & Kennard (1970-a) يكون مقدر الحرف العام لمتجه المعلمات $\underset{-}{\beta}$ معرفا بالشكل الآتي:-

$$\underset{-R}{\hat{\beta}} = (\Lambda + K)^{-1} X'Y = \Delta \underset{-}{b} \qquad ...(2)$$

حيث أن : $\Lambda = dig(\lambda_i)$ تمثل مصفوفة الجذور المميزة للمصفوفة $X'X$ والمصفوفة K هي مصفوفة قطرية عناصرها هي ثوابت غير سالبة وتمثل عوامل الحرف ،أما المتجه $\underset{-}{b} = \Lambda^{-1} X'Y$ فيمثل مقدر المربعات الصغرى للمتجه $\underset{-}{\beta}$ وان $\Delta = \Lambda(\Lambda + K)^{-1}$.

تتمثل مصفوفة مربعات الخطأ للمقدر $\hat{\underline{\beta}}_R$ بالتوقع الرياضي لدالة الخسارة التربيعية للمقدر $\hat{\underline{\beta}}_R$ وهي:

$$MSE\left(\hat{\underline{\beta}}_R\right) = E\left(\hat{\underline{\beta}}_R - \underline{\beta}\right)\left(\hat{\underline{\beta}}_R - \underline{\beta}\right)' \quad \ldots (3)$$

إن القيم المثلى لعناصر مصفوفة عوامل الحرف هي تلك القيم التي تجعل عناصر مصفوفة متوسط مربعات الخطأ اقل ما يمكن وتعرف القيمة المثلى لعامل الحرف على وفق المعادلة الآتية:-

$$k_i(opt) = \frac{\sigma^2}{\beta_i^2} \qquad , i = 1,2,\ldots,P \qquad \ldots(4)$$

يعامل عامل الحرف في المعادلة (4) بوصفه كمية ثابتة ولكن في التطبيق العملي لا يمكن تحديد القيمة الابتدائية لـ σ^2 و $\beta_i \,,\; i = 1,2,\ldots,P$ لذلك اقترح Hoerl و Kennard (1970a) باختيارها كقيمة ابتدائية لـ σ^2 و β_i لتمثلا مقدري المربعات الصغرى S^2 و b_i على الترتيب لذلك تكون القيمة الابتدائية لعامل الحرف معرفة بالشكل الآتي:-

$$\hat{k}_i = \frac{S^2}{b_i^2} \qquad i = 1,2,\ldots,P \qquad \ldots(5)$$

حيث أن b_i يمثل العنصر i من عناصر المتجه $\underline{b}$ المقدر بطريقة المربعات الصغرى وان :

$$S^2 = \frac{1}{v}\left(\underline{Y} - X\underline{b}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{b}\right) \qquad \ldots(6)$$

حيث أن :

$$v = \begin{cases} n\text{-}P\text{-}1 & \textit{if the observations are taken as the deviation from their corresponing mean} \\ n\text{-}P & \text{O.W.} \end{cases}$$

إن مقدر عامل الحرف المعرف في المعادلة (5) متغير عشوائي يستوجب الاهتمام في البحث عن توزيعه الاحتمالي.

(3)- استنتاج التوزيع الاحتمالي لمقدر عامل الحرف:

نفرض بأن متجه الأخطاء العشوائية $\underline{U}$ يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد والذي يوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{U} \sim N_n\left(0, \sigma^2 I_n\right)$$

نجزئ مصفوفة المتغيرات التوضيحية X بالشكل الآتي:

$$X = \left(\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \dots \quad \underline{X}_P\right) \qquad \dots(7)$$

حيث أن $i = 1,2,\dots,P$, $\underline{X}_i$ يمثل العمود i من أعمدة المصفوفة X فان العنصر i في المتجه $\underline{b}$ يأخذ الشكل الآتي:

$$b_i = \frac{X_i' Y}{\lambda_i} \qquad \dots(8)$$

من المعروف أن التوزيع الاحتمالي لمقدر المربعات الصغرى للمتجه $\underline{\beta}$ هو توزيع طبيعي متعدد ويوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{b} \sim N_P\left(\underline{\beta}, \sigma^2 \Lambda^{-1}\right) \qquad \dots(9)$$

ويوصف التوزيع الهامشي لـ b_i بالشكل الآتي:

$$b_i \sim N\left(\beta_i, \sigma^2 \lambda_i^{-1}\right) \qquad \dots(10)$$

باستخدام المعادلة (7) في المعادلة (2) نحصل على المكون i من مكونات $\hat{\underline{\beta}}_R$ يعرف على وفق المعادلة الآتية:

$$\hat{\beta}_{iR} = \frac{X_i'Y}{\lambda_i + \hat{k}_i} = \hat{\delta}_i\, b_i \qquad ...(11)$$

حيث ان:

$$\hat{\delta}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \hat{k}_i} \qquad ...(12)$$

يمثل المقدر المعرف في المعادلة (11) بالمقدر المتقلص (Shrunken estimator) ويدعى العامل $\hat{\delta}_i$ بالعامل المتقلص (Shrinkage factor).(Gunst and Mason (1977))

أما بالنسبة الى المتغير العشوائي Z_i فيعرف كالآتي:

$$Z_i = \frac{b_i}{Var(b_i)} = \frac{X_i'Y}{\sigma|\sqrt{\lambda_i}} = \frac{\sqrt{\lambda_i}\, b_i}{\sigma} \qquad ...(13)$$

فان:

$$Z_i \sim N(\tau_i, 1)$$

حيث أن:

$$\tau_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sigma}\beta_i \qquad ...(14)$$

نعرف الآن المتغير العشوائي الجديد

$$W_i = Z_i^2 = \frac{\lambda_i b_i^2}{\sigma_2} \qquad , W_i > 0$$

إن الدالة المولدة لعزوم المتغير الجديد W_i هي:

$$\mu_{W_i}(t) = Ee^{tW_i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}}{j!(1-2t)^{\frac{1}{2}(1+2j)}} \qquad ...(15)$$

إن الدالة المولدة لعزوم المتغير W_i المعرفة في المعادلة (15) تمثل الدالة المولدة لعزوم توزيع مربع كاي اللامركزي ((Hogg and Craig (2004) بالمعلمة

اللامركزية $\frac{\tau_i^2}{2}$ ودرجة حرية $(1+2j)$ وبذلك تاخذ دالة كثافة احتمال المتغير الجديد W_i الشكل الآتي:

$$f(W_i)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}(W_i)^{\frac{1}{2}+j-1}e^{-\frac{1}{2W_i}} \quad ,W_i>0 \qquad ...(16)$$

يعبر عن هذا التوزيع الاحتمالي وصفياً بالشكل الآتي:

$$W_i\sim\chi^2_{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2,\frac{1}{2}+j\right)} \qquad ...(17)$$

ومن المعروف أن $\frac{vS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(v)$ ومستقل عن Z_i ، $i=1,2,...,P$ والمختبر الإحصائي:

$$F_i=\frac{Z_i^2 v}{vS^2}=\frac{\lambda_i b_i^2}{S^2}=\lambda_i\hat{K}_i$$

الذي يستخدم لاختبار الفرضية : $,i=1,2,...,P$ $H_0:\beta_i=0$ يتوزع توزيع F اللامركزي والذي يعبر عنه وصفيا بالشكل الآتي:

$$F_i\sim F\left(1,v,\frac{1}{2}\tau_i^2,0\right)$$

نعود الآن إلى مقدر العامل المتقاص المعرف في المعادلة (12) وبعد قسمة كل من البسط والمقام على $\hat{k}_i$، نحصل على ما ياتي:

$$\hat{\delta}_i=\frac{F_i}{F_i+1} \qquad ...(18)$$

عند إجراء عمليات رياضية بسيطة على المعادلة (18) ينتج:

$$\lambda_i^{-1}\hat{k}_i=F_i^{-1}=\frac{\chi^2(v)}{v\chi^2(1,\tau_i^2)} \qquad ...(19)$$

إن F_i^{-1} أيضا يتبع توزيع F اللامركزي ويعبر عنه وصفياً بالشكل الآتي:

$$F_i^{-1} \sim F\left(v,1,0,\tau_i^2\right) \qquad ...(20)$$

ولكن :

$$f\left(F_i^{-1}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}(v)^{\frac{v}{2}}\frac{\left(F_i^{-1}\right)^{\frac{v}{2}-1}}{\left(1+vF_i^{-1}\right)^{\frac{v+1}{2}+j}}=f\left(\lambda_i^{-1}\hat{k}_i\right)=f\left(\frac{S^2}{\lambda_i b_i^2}\right) \quad ...(21)$$

أما دالة كثافة احتمال $\hat{k}_i$ فهي معرفة بالشكل الآتي:

$$f\left(\hat{k}_i\right)=f\left(\frac{\lambda_i S^2}{\lambda_i b_i^2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}(v)^{\frac{v}{2}}\frac{\left(\hat{k}_i\right)^{\frac{v}{2}-1}}{\left(1+v\hat{k}_i\right)^{\frac{v+1}{2}+j}} \quad ,\hat{k}_i>0 \quad ...(22)$$

حيث ان المعادلة (22) تمثل دالة كثافة احتمال مقدر عامل الحر ف العشوائي وهي دالة كثافة احتمال توزيع F اللامركزي ويعبر عنه وصفيا بالآتي:

$$\hat{k}_i \sim F\left(v,1,0,\frac{1}{2}\tau_i^2\right) \qquad ...(23)$$

وباستخدام المعادلة (18) يعرف مقلوب العامل المتقاص بالصورة الآتية:

$$\hat{\delta}_i^{-1}=1+F_i^{-1} \qquad ...(24)$$

يكون التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\delta}_i^{-1}$ باستخدام التحويلات بأخذ الصورة الآتية:

$$f\left(\hat{\delta}_i^{-1}\right)=f\left(F_i^{-1}=\hat{\delta}_i^{-1}-1\right)\left|\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial \hat{\delta}_i^{-1}}\right|=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}(v)^{\frac{v}{2}}\frac{\left(\hat{\delta}_i^{-1}-1\right)^{\frac{v}{2}-1}}{\left(1+v\left(\hat{\delta}_i^{-1}-1\right)\right)^{\frac{v+1}{2}+j}}$$

$$1<\hat{\delta}_i^{-1}<\infty \qquad ...(25)$$

(4)- التوزيع الاحتمالي لمقدر معلمات نموذج الانحدار بطريقة انحدار الحرف

نفرض أن b_i مستقل عن $\hat{\delta}_i^{-1}$ فان التوزيع الاحتمالي المشترك لـ $\left(b_i,\hat{\delta}_i^{-1}\right)$ يتمثل بحاصل ضرب التوزيع الاحتمالي لـ b_i بالتوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\delta}_i^{-1}$، أي أن:

$$f\left(b_i,\hat{\delta}_i^{-1}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}(v)^{\frac{v}{2}}\frac{\left(\hat{\delta}_i^{-1}-1\right)^{\frac{v}{2}-1}}{\left(1+v\left(\hat{\delta}_i^{-1}-1\right)\right)^{\frac{v+1}{2}+j}}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}(b_i-\beta_i)^2}$$

...(26)

نعرف الآن المتغير العشوائي $f_i^*=\hat{\delta}_i^{-1}$ حيث أن f_i^* معرف ضمن الفضاء $1<f_i^*<\infty$ وان مقدر انحدار الحرف المتحيز للمعلمة β_i يكون بالشكل $\hat{\beta}_{iR}=\frac{b_i}{f_i^*}$ حيث أن $-\infty<\hat{\beta}_{iR}<\infty$ والتوزيع المشترك لـ f_i^* و $\hat{\beta}_{iR}$ يكون بالشكل الآتي:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR},f_i^*\right)=f\left(\hat{\delta}_i^{-1},b_i\right)|J|\Big|_{\hat{\delta}_i^{-1}=f_i^*,\,b_i=f_i^*\hat{\beta}_{iR}} \qquad ...(27)$$

حيث أن $|J|$ يمثل عامل التحويل ومساو لـ f_i^* وبعد التعويض وإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة على المعادلة (27) نحصل على ما ياتي:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR}, f_i^*\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)} (v)^{\frac{v}{2}} \frac{\left(f_i^*-1\right)^{\frac{v}{2}-1}}{\left(1+v\left(f_i^*-1\right)\right)^{\frac{v+1}{2}+j}} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\left(\hat{\beta}_{iR} f_i^* - \beta_i\right)^2} \quad ...(28)$$

يتم الحصول على التوزيع الهامشي لـ $\hat{\beta}_{iR}$ من تكامل التوزيع المشترك لـ f_i^* و $\hat{\beta}_{iR}$ في المعادلة (28) أعلاه نسبة إلى f_i^* أي أن:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR}\right) = \int_1^{\infty} f\left(\hat{\beta}_{iR}, f_i^*\right) df_i^* \quad ...(29)$$

نُعرف الآن هذا المتغير العشوائي الجديد $u_i^* = \frac{v\left(f_i^*-1\right)}{1+v\left(f_i^*-1\right)}$ حيث أن u_i^* معرف ضمن الفضاء $0 < u_i^* < 1$ وان $f_i^* = 1 + \frac{u_i^*}{v\left(1-u_i^*\right)}$ وان $df_i^* = \frac{du_i^*}{v\left(1-u_i^*\right)^2}$ وبذلك فان المعادلة (28) تصبح بالشكل الآتي:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)} (v)^{\frac{v}{2}} \int_0^1 \left[\frac{\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{v}{2}} u_i^{*\frac{v}{2}-1}}{\left(1-u_i^*\right)^{\frac{v}{2}+1}} \left(1-u_i^*\right)^{\frac{v+1}{2}+j} + \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{v}{2}+1} \frac{u_i^{\frac{v}{2}} \left(1-u_i^*\right)^{\frac{v+1}{2}+j}}{\left(\left(1-u_i^*\right)\right)^{\frac{v}{2}+1}} \right]$$

$$\exp\left\{ -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2} \left[\begin{array}{l} \frac{u_i^{*2}}{v\left(1-u_i^*\right)^2} \left[\left(\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2 \left(\frac{v}{2v-1}\right) + \frac{(1-2v)}{v} \hat{\beta}_{iR}^2 - 2\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)\hat{\beta}_{iR} \right) \right] \\ + \frac{u_i^*\left(2\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)}{v(1-2v)\left(1-u_i^*\right)^2} \left[(1-2v)\hat{\beta}_{iR} - v\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right) \right] + \frac{\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2}{(1-2v)\left(1-u_i^*\right)^2} \end{array} \right] \right\} du_i^* \quad ...(30)$$

نعرف متغيراً عشوائياً آخر $g_i = \dfrac{u_i^*}{1-u_i^*}$ حيث أن g_i معرفة ضمن الفضاء $0 < g_i < \infty$ وان $u_i^* = \dfrac{g_i}{1+g_i}$ وان $du_i^* = \dfrac{dg_i}{(1+g_i)^2}$ بذلك فان المعادلة (30) تصبح بالشكل الآتي:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2} (v)^{\frac{v}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{v}{2}} \frac{g_i^{\frac{v}{2}-1}}{(1+g_i)^{\frac{v+1}{2}+j}} + \frac{\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{v}{2}+1} g_i^{\frac{v}{2}}}{(1+g_i)^{\frac{v+1}{2}+j+1}} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda_i}{2\sigma^2 v}\right)^r \frac{(A_2+2A_3)^r}{r!} g_i^r \left(\frac{A_1+A_2+A_3}{A_2+2A_3} g_i + 1\right)^r dg_i \right\} . e^{-\frac{-\lambda_i}{2\sigma^2 v}} \quad ...(31)$$

حيث أن:

$$A_1 = \frac{v}{2v-1}\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2 - 2\hat{\beta}_{iR}\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2 - 2\hat{\beta}_{iR}\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2 + (1-2v)\hat{\beta}_{iR}^2 \quad ...(32)$$

$$A_2 = 2\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)\hat{\beta}_{iR} - \frac{2v\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2}{1-2v} \quad ...(33)$$

$$A_3 = \frac{v\left(\hat{\beta}_{iR}-\beta_i\right)^2}{1-2v} \quad ...(34)$$

نعرف المتغير العشوائي: $h_i = \dfrac{g_i}{g_i+1}$ حيث أن h_i معرف ضمن الفضاء $0 < h_i < 1$ وان $g_i = \dfrac{h_i}{1-h_i}$ و $dg_i = \dfrac{dh_i}{(1-h_i)^2}$ بعد التعويض عن g_i بدلالة h_i و dg_i بما يساويها وإجراء بعض العمليات التحليلية البسيطة على المعادلة (31)

وإجراء التكامل نسبة إلى h_i نحصل على التوزيع الاحتمالي التقريبي لـ $\hat{\beta}_{iR}$ ويكون معرفاً على وفق المعادلة الآتية:

$$f\left(\hat{\beta}_{iR}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\tau_i^2\right)^j}{j!}e^{-\frac{1}{2}\tau_i^2}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+j\right)}.e^{-\frac{-\lambda_i A_3}{2\sigma^2}}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{2\pi\sigma}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_i}{2\sigma^2 v}\right)^r}{r!}\left(A_2+2A_3\right)^r\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}$$
$$\left(\frac{A_1+A_2+A_3}{\left(A_2+2A_3\right)}\right)^s\left[\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+r+s+1-j\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+2\left(r+s\right)+1-j\right)}+\frac{1}{v}\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r+s+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+r+s+1-j\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+2\left(r+s+1\right)-j\right)}\right]$$
... (35)

حيث أن A_1, A_2, A_3 معرفة في المعادلات (32-34) على الترتيب،ويجب أن تكون $v \geq 2_j - 3$ عندما $r=0$ وان $2(r+s)\geq j-1$ لجميع قيم $j \geq 2$ و $r>0$.

(5)- الاستنتاجات

لقد توصلنا في هذا البحث إلى الاستنتاجات الآتية:

1. التوزيع الاحتمالي لمقدر عامل الحرف العشوائي يتبع توزيع F اللامركزي بالمعلمة $\frac{1}{2}\tau_i^2$ وبدرجتي حرية $(1,v)$.

2. التوزيع الاحتمالي للعامل المتقلص من التوزيعات الاحتمالية اللامركزية غير الشائعة.

3. إن التوزيع الاحتمالي لمقدر معلمة انحدار الحرف العشوائي ليس من التوزيعات الاحتمالية الشائعة.

(6)- التوصيات

يوصي الباحثان بالآتي:

1. إجراء دراسات مستقبلية تتعلق بخواص التوزيع الاحتمالي لمقدر معلمات نموذج انحدار الحرف تحليلياً أو باستخدام المحاكاة.
2. البحث عن خواص التوزيع الاحتمالي للعامل المتقلص.

(7)- المصادر

1. Dwivedi; T.D; Srivastava, V.K.and Hall,R.L.(1980),"Finite sample proper-ties of ridge estimators", Technometrics, Vol.22No.2,PP 205-212.
2. Firiguetti,L. and Rubio,H. (2000)"A note on the moments of stoc-hastic Shrinkage parameters in Ridge regression". Communications in Statistics- Simulations and Computation, 29,955-970.
3. Gunst,R.F. and Mason ,R.L.(1977)."Biased estimation in regression:an evaluation using mean square error".J.Amer.Statist.Assoc.,72,616-628.
4. Hemmerle,W.J.(1975),"An explicit solution for generalized ridge regression" ,Technometrics,17,309-314.
5. Hoerl,A.E.and Kennard,R.W.(1970a)."Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems", Technometrics,12,55-67.
6. Hoerl,A.E. and Kennard,R.W.(1970b)."Ridge Regression: applications to non-orthogonal problems".Technometrics, 12, 69-82.
7. Hogg,R.V. and Graig A.T.(2004)"Introduction to mathematical statistics", Sixth edition, Pearson prentice law.USA.
8. Obenchain, R.L. (1975)."Ridge an analysis following a preliminary test of the shrunken hypothesis", Technometrics, 17,431-441.
9. Rubio, H. and Firinguetti, L. (2002),"The distribution of stochastic Shrinkage parameters in Ridge regression", Working papers series of the central bank of Chile,No.137.
10. Theobald, C.M. (1974),"Generalizations of mean squared error applied to ridge regression", J.Roy.Statist.Soc.B, 36,103-106.